Chapitre :
Graphes

∽

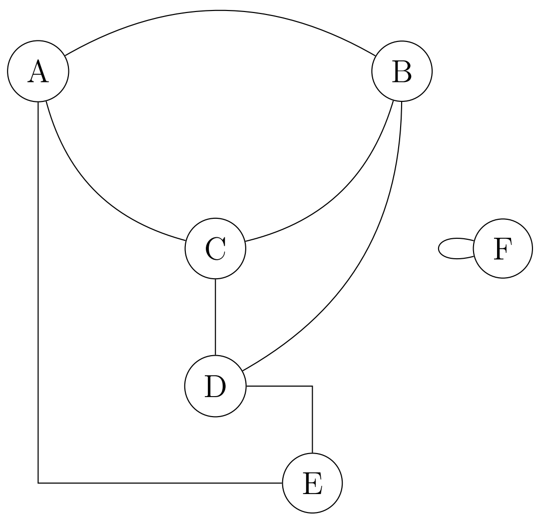
I. Graphes non orientés

⊛ **Activité :** 1 pp342-343

Définition

- Un **graphe** est un ensemble de points et de lignes reliant certains de ces points.
- Un **sommet** du graphe est un point du graphe. Le nombre de sommets est appelé **ordre** du graphe.
- Une **arête** du graphe est une ligne reliant deux sommets. Une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même.
- Un sommet est **isolé** lorsque aucune arête ne le relie aux autres sommets.
- Un graphe **simple** est un graphe sans boucle tel qu'entre deux sommets il y a au plus une arête.
- Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.
- Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité. Une boucle compte alors pour 2.

Exemple



- L'ordre de ce graphe est 6 ;
- Il contient 8 arêtes dont une boucle (sur le sommet F) ;
- F est un sommet isolé ;
- Si on enlève le sommet F, le graphe obtenu est simple ;
- Les sommets A et E sont adjacents, mais pas A et D ;
- Le degré du sommet B est 3.

▶ **Exercices :** 6-9 p376

Théorème La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes.

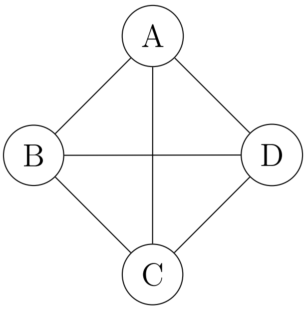
Démonstration : Vient du fait qu'une arête compte deux sommets, donc est comptée deux fois dans le calcul des degrés.

▶ **Exercices :** 10,11p376

Définition Un graphe complet est un graphe simple dont tous les sommets sont adjacents les uns avec les autres.

Dans un graphe d'ordre n, chaque sommet a donc pour degré $n-1$, et le nombre d'arêtes est $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exemple Un graphe complet d'ordre 4 :



▶ **Exercices :** 12,13p377

II. Cycles eulériens et chaînes eulériennes

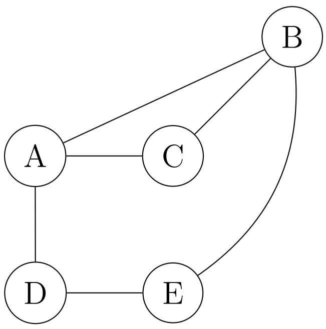
⊛ **Activité :** 2Ap345 (chaînes)

Définition

- **Une chaîne** est une suite d'arêtes mises bout à bout.
- **La longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes qui la composent.
- Une chaîne est dite **fermée** si ses extrémitée coïncident.
- Une chaîne fermée est un **cycle** si toutes les arêtes de la chaîne sont distinctes.

On décrit une chaîne en écrivant la succession des sommets par lesquels elle passe.

Exemple



- Une chaîne dans ce graphe est par exemple : A - C - B - E. Elle est de longueur 3 ;
- La chaîne A - C - B - A est fermée, et est même un cycle ;

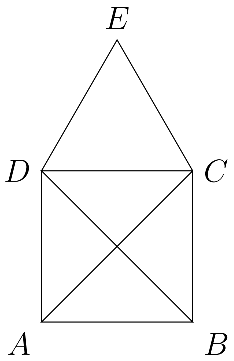
► **Exercices :** 18p377

⊛ **Activité :** 3 des pages 348 et 349

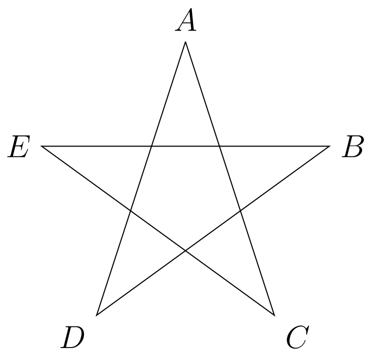
Définition Un graphe est connexe si deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne.

Définition On appelle chaîne eulérienne une chaîne contenant une fois et une seule chacune des arêtes du graphe.
On appelle cycle eulérien un cycle qui est une chaîne éulérienne.

Exemple Les deux graphes : « maison » et « étoile à cinq branches ».



Il y a une chaîne eulérienne :
$A - D - E - C - A - B - D - C - B$



Il y a un cycle eulérien :
$A - D - B - E - C - A$

Théorème Soit G un graphe connexe.
G admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.
G admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 2.
Dans ce cas, les deux sommets en question sont les extrémités de la chaîne.

Démonstration : Lire le livre page 351. Sauf le point où l'on affirme qu'il existe une chaîne A-B dont l'un des sommets n'appartient pas à la chaîne :
Il existe une arête par laquelle C ne passe pas.
Si la chaîne (cycle) C passe par A, on considère la chaîne B-A-C (C vue comme chaîne de A à A), qui est plus longue.
Sinon, on suit les indications du livre.

Méthode Voir l'algorithme page 352 (insertion de cycles par étapes)

► **Exercices :** 19,21,22,23 p378

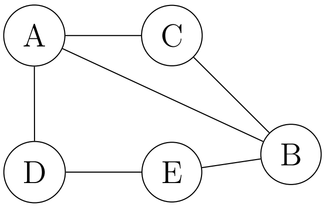
III. Matrice associée à un graphe

⊛ **Activité :** 2Bp345 (matrice)
On peut vouloir connaître le nombre de chaînes de longueur donnée reliant deux sommets d'un graphe. Pour cela, on va utiliser les matrices.

Définition La matrice associée à un graphe d'ordre n est la matrice carrée A de dimension $n \times n$ telle que l'élément a_{ij} vaut le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j.
Si i et j ne sont pas adjacents, alors $a_{ij} = 0$.

On appelle également cette matrice la matrice d'adjacence du graphe (car elle indique les sommets adjacents).

Exemple La matrice associée au graphe suivant, déjà donné plus haut, en considérant les sommets rangés par ordre alphabétique, est :



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque

- On observe que la matrice est **symétrique** (par rapport à la diagonale principale. Cela vient du fait que le graphe est non orienté : si il y a une arête d'un sommet A vers un sommet B, alors il y a une arête (la même) du sommet B vers le sommet A.
- On peut obtenir le degré de chaque sommet en ajoutant les nombres de la ligne qui correspond au sommet.
- On peut alors obtenir le nombre d'arêtes en ajoutant tous les nombres puis en divisant par deux, ou en ajoutant seulement les nombres situés au dessus de la diagonale principale.

▶ **Exercice :** 14p377

Théorème Soit M la matrice associée à un graphe. Soit p un entier ($p \geqslant 1$). Alors l'élément m_{ij} de M^p est égal au nombre de chaînes de longueur p reliant les sommets i et j.

Démonstration : Voir le livre page 347

Exemple Dans le graphe précédent, le nombre m_{15} de M^3 vaut 1. Cela signifie qu'il y a une seule chaîne de longueur 3 qui relie le sommet A au sommet E.

▶ **Exercices :** 16,17p377

IV. Graphes orientés, étiquetés, pondérés

⊛ **Activité :** pages 353,354 (à faire en plusieurs parties, rapidement sur les graphes étiquetés et reconnaissance de mots)

Définition (Graphe orienté) Un graphe est orienté si les arêtes ne peuvent être parcourues que dans un sens. L'orientation est indiquée par une flèche.
On utilise les mots :

- **arc** pour une arête orientée ;
- **chemin** pour une chaîne (orientée) ;
- **chemin fermé** pour une chaîne (orientée) fermée ;
- **circuit** pour un cycle.

La matrice associée à un graphe orienté n'est plus nécessairement symétrique.

▶ **Exercices :** 29,30,31p380 (attention des confusions entre chemin fermé et circuit)

Définition (Graphe étiqueté, pondéré) Un graphe **étiqueté** est un graphe dont les arêtes portent une étiquette (une lettre, un nombre, . . .).
Un graphe **pondéré** est un graphe étiqueté dont les étiquettes sont des nombres (dont la somme a un sens) appelés **poids**.
Le **poids d'une chaîne** est la somme des poids des arêtes de la chaîne.

Entre deux sommets, on peut chercher à déterminer une chaîne de poids minimal (on dit aussi une plus courte chaîne). Cette recherche se fait grâce à un algorithme, l'algorithme de Moore-Dijkstra. **Voir** page 356 l'algorithme de Moore-Dijkstra et son application page 366.

▶ **Exercices :** 33,34,35,36p381

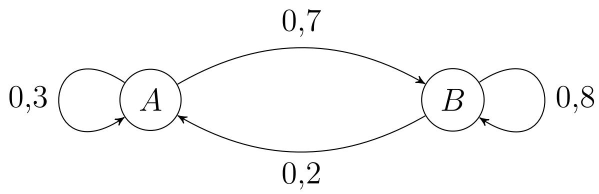
V. Graphes probabilistes

⊛ **Activité :** 5 pages 357 à 358 (pas la dernière partie)

Définition Un graphe probabiliste est un graphe simple orienté pondéré vérifiant :
- Il y a au plus un arc d'un sommet à un autre (le graphe est simple) ;
- Les poids des arcs sont positifs ;
- La somme des poids des arcs partant d'un sommet vaut 1.

Les poids des arcs sont alors des probabilités, il donnent la probabilité d'aller d'un état (sommet) vers un autre.

Exemple Exemple de graphe probabiliste d'ordre 2 :



Définition La matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre n est la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont donnés par les **poids** des arcs (et non seulement le nombre d'arcs comme pour la matrice d'adjacence).

Exemple La matrice de transition de l'exemple précédent est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

▶ **Exercices :** 37p381 (graphes), 38p381 (matrices)
Chacun des sommets du graphe est un état, ou issue, possible dans une expérience aléatoire. On considère une loi de probabilité sur l'ensemble des sommets. Cette loi peut être représentée par une matrice ligne, que l'on appelle état probabiliste.
Pour un graphe d'ordre 2, avec un sommet A et un sommet B, l'état probabiliste est donc donné par une matrice ligne à deux éléments : $(p_a \quad p_b)$.
Bien sûr, la somme des coefficients d'un état probabiliste vaut 1.
L'expérience aléatoire consiste à changer d'état selon les probabilités données dans le graphe probabiliste. On répète cette expérience autant de fois que l'on souhaite.
Par conséquent :

Propriété Soit M la matrice de transition d'un graphe probabiliste. Soit P_0 la matrice ligne décrivant l'état probabiliste initial. Soit pour tout n un entier, P_n la matrice ligne décrivant l'état probabiliste après n étapes.
Alors :

$$P_{n+1} = P_n \times M$$

et

$$P_n = P_0 \times M^n$$

Démonstration (pour un graphe d'ordre 2) : Voir celle du livre page 361

Exemple On considère l'exemple donné plus haut. On choisit l'état initial ainsi : $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.
L'état à l'étape 1 est : $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$.
Celui de l'étape 5 est : $P_5 = P_0 \times M^5 \simeq \begin{pmatrix} 0{,}2222 & 0{,}7778 \end{pmatrix}$.

▶ **Exercices :** 39p381, 40,41p382

Définition On appelle état **stable** un état qui ne change pas après répétition de l'expérience.
Cet état stable P est donc solution de l'équation $P = P \times M$.

Propriété Dans le cas d'un graphe d'ordre 2, si la matrice de transition ne contient pas de 0, alors il existe un unique état probabiliste P. De plus, quelque soit l'état initial P_0, la suite des états probabilistes $(P_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers cet état stable P.

Démonstration : Admis.

Exemple Déterminons l'état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ du graphe précédent.
On a $P = P \times M$, donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0{,}3a + 0{,}2b \\ b & = & 0{,}7a + 0{,}8b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 0{,}7a & = & 0{,}2b \\ 0{,}2b & = & 0{,}7a \end{array} \right.$$

On observe que l'on obtient deux fois la même ligne, donc on a la seule équation $0{,}7a = 0{,}2b$.
Pour déterminer les valeurs de a et b, on utilise le fait que P est un état probabiliste, donc $a + b = 1$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} a + b = 1 \\ 0{,}7a = 0{,}2b \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 1 - a \\ 0{,}7a & = & 0{,}2(1 - a) \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 1 - a \\ 0{,}9a & = & 0{,}2 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 1 - a = \dfrac{7}{9} \\ a & = & \dfrac{2}{9} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, $P = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{9} & \dfrac{7}{9} \end{pmatrix}$.

▶ **Exercice :** dernière partie de l'activité 5p358

▶ **Exercices :** 42,43p382

★ **Approfondissement :** 51p384