Chapitre :
Matrices

∽

I. Généralités

⊛ **Activité :** 1p296

Définition Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
On appelle **matrice** réelle à n lignes et p colonnes la donnée d'un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes composé de nombres réels. Les éléments d'une matrice sont appelés **coefficients** ou **termes** de la matrice.
On dit qu'une matrice à n lignes et p colonnes est **d'ordre** (n,p) ou de **dimension** $n \times p$.
L'ensemble des matrices de dimension $n \times p$ à coefficients réels se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 4 & -2 \\ \sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}$$

la matrice A est de dimension 3×2.

Définition Soit A une matrice de dimension $n \times p$.
On note a_{ij} le terme de la matrice situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne.

Exemple Le terme a_{22} (ou $a_{2,2}$ en cas d'ambiguïté) de la matrice A de l'exemple plus haut est -2.
Le terme a_{31} est $\sqrt{3}$.

Définition (Cas particuliers)

- Si $n = 1$ (une seule ligne) on dit que la matrice est une **matrice ligne**.
- Si $p = 1$ (une seule colonne) on dit que la matrice est une **matrice colonne**.
- Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes) on dit que la matrice est une **matrice carrée**. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

Définition (Transposée) Soit A une matrice. La matrice transposée de A, notée ${}^tA$, est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. Elle est donc de dimension $p \times n$.

Exemple La matrice transposée de A donnée plus haut est

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{4} & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculatrice : On peut utiliser les matrices avec les calculatrices. Voir livre page 299.

▶ **Exercices :** 5-7,10,11p322, 18p323

Définition (Égalité) Deux matrices A et B sont égales si elles ont les mêmes dimensions et si leurs coefficients sont égaux position par position ($a_{ij} = b_{ij}$)

Exemple Faire l'exercice 13p323.

▶ **Exercices :** 14,15p323

II. Opérations

⊛ **Activité :** 2p300 (sauf la dernière partie 8.)

Définition (Somme) Soit A et B deux matrices réelles de mêmes dimensions. On appelle somme de A et B la matrice notée $A+B$, de mêmes dimensions que A et B, obtenue en ajoutant les coefficients situés en même position dans A et dans B.

Exemple Somme de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Définition (Produit par un réel) Soit A une matrice et λ un réel. On appelle produit de A par le réel λ la matrice, notée λA, de mêmes dimensions que A, obtenue en multipliant tous les coefficients de A par λ.
Dans le cas particulier où $\lambda = -1$, on obtient la matrice $-A$, opposée de A.

Exemple Prendre A de l'exemple précédent, et multiplier par -2.

Propriété Soit A, B et C trois matrices de mêmes dimensions. Soit k et k' deux réels. Alors :

- $A + B = B + A$: l'addition est commutative ;
- $(A + B) + C = A + (B + C)$: l'addition est associative ;
- $k(A + B) = kA + kB$: le produit par un réel est distributif ;
- $k(k'A) = k'(kA) = (kk')A$: associativité mixte.

▶ **Exercices :** 21,22 (sauf 3. à moins de définir I_n),24,27p324

Définition (Produit de matrices) Soit A une matrice de dimensions $n \times r$ et B une matrice de dimensions $r \times p$. On appelle produit des matrices A et B la matrice de dimensions $n \times p$ telle que l'élément à la ligne i et à la colonne j est obtenue à partir de la ligne i de A et la colonne j de B comme suit :

$$c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \cdots + a_{ir} \times b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \times b_{kj}$$

Exemple Un produit 2×3 par 3×2

Remarque À cause des dimensions, si le produit $A \times B$ existe, ce n'est pas forcément le cas de $B \times A$. Et si les deux produits existent, ils ne sont en général pas égaux (voir l'exemple précédent : les dimensions ne sont même pas identiques).

▶ **Exercices :** 35,37,38,41p325

Définition (Identité) On appelle matrice identité de taille (ou d'ordre) n la matrice carrée d'ordre n, notée I_n, dont les coefficient valent :

- 1 sur la diagonale principale ;
- 0 ailleurs.

La diagonale principale étant celle qui va du coefficient a_{11} au coefficient a_{nn}.

Exemple

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplier une matrice par I_n a le même effet que multiplier un nombre par 1 :

Propriété Soit n un entier, et A et B deux matrices. Si les produits suivants, existent, alors :

$$B \times I_n = B \qquad \text{et} \qquad I_n \times A = A$$

Propriété Soit A, B et C trois matrices. Si les opérations indiquée sont possibles alors on a :

- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$: le produit se distribue à gauche sur la somme
- $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$: le produit se distribue à droite sur la somme
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$: le produit est associatif

Définition (puissance) Soit A une matrice carrée et soit n entier non nul.
Alors A^n est la matrice définie par :

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$$

▶ **Exercices :** 30p324, 31p325, 40p325

▶ **Exercices :** 49p326, 51p327

III. Matrices inverses

⊛ **Activité :** 3p306 (parties 1 à 3)

Définition Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est inversible s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que

$$A \times B = I_n$$

On admet alors que l'on a également $B \times A = I_n$.

Propriété Soit A une matrice inversible.
Alors il existe une unique matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_n$.
On note cette matrice A^{-1} et on l'appelle matrice inverse de A.

Démonstration : Soit B et C telles que $A \times B = A \times C = I_n = C \times A = B \times A$. Alors

$$B = B \times I_n = B \times (A \times C) = (B \times A) \times C = I_n \times C = C$$

(on a utilisé l'associativité du produit matriciel)

La calculatrice est capable de déterminer A^{-1}.

Remarque On peut déterminer la matrice inverse d'une matrice A, quand elle existe, en résolvant un système d'équations.

Application (voir page 309) :
Un système d'équations linéaires peut se ramener à la recherche d'une matrice inverse.
En effet, si l'on appelle X la matrice colonne des inconnues, et si l'on peut ramener le système d'équation à une équation matricielle $AX = B$ où A est une matrice carrée inversible, alors on a $X = A^{-1}B$.

▶ **Exercices :** 66,67,69p329 (traduction sous forme matricielle).

▶ **Exercices :** 71,72,73p329 (inversion de matrice)

▶ **Exercices :** 74,75p329

▶ **Exercices :** 81,82p330 (83 en DM ?)

▶ **Exercices :** 84,85p330 (coefficients de fonctions polynomiales)