

**Propriété** (et définition) Pour tout nombre réel  $k$ , il existe un unique nombre réel solution de l'équation  $x^3 = k$ , autrement dit un unique réel dont le cube est  $k$ .

Ce nombre est appelé racine cubique de  $k$ . Il est noté  $\sqrt[3]{k}$ .

**Exemple** On a par exemple  $\sqrt[3]{8} = 2$  parce que  $2^3 = 8$ .

Au XVIème siècle, l'italien **Jérôme Cardan** (de son vrai nom *Girolamo Cardano*), confronté à la résolution des équations du troisième degré de la forme  $x^3 = px + q$  donne la formule suivante appelée **formule de Cardan** :

Si  $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \geq 0$ , alors l'équation a pour solution

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

1. On considère l'équation  $x^3 = 1$ . Quelles sont les valeurs de  $p$  et  $q$  ?

Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan.

Quelle solution obtient-on ?

2. On considère l'équation  $x^3 = 3x + 2$ .

Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan.

Quelle solution obtient-on ?

3. On considère l'équation  $x^3 = 15x + 4$ .

Justifier que la formule de Cardan ne peut pas s'appliquer.

On décide malgré cela d'appliquer la formule pour voir ce qui se passe.

Comment s'écrirait la solution en s'autorisant des notations habituellement interdites ?

4. *Imaginons* un nombre dont le carré est  $-1$ , et qui sera **très temporairement** noté  $\sqrt{-1}$ .

En utilisant ce nombre *imaginaire* et en effectuant des calculs « habituels », montrer que

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

En déduire que  $2 + \sqrt{-1}$  serait une racine cubique d'un nombre s'écrivant  $2 + \sqrt{-121}$ .

« Démontrer » de même que  $2 - \sqrt{-1}$  serait racine cubique de  $2 - \sqrt{-121}$ .

Montrer alors que la formule de Cardan appliquée à l'équation  $x^3 = 15x + 4$  donne une solution tout à fait réelle. Vérifier que le nombre obtenu est effectivement solution de l'équation.

On a donc, en utilisant des nombres *imaginaires*, obtenu un résultat bien réel.

5. On sait que si  $a$  et  $b$  sont deux réels strictement positifs, alors :  $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ .

Si on utilise cette égalité avec  $a = b = -1$ , qu'obtient-on ? Est-ce satisfaisant ?

C'est la raison pour la quelle on n'utilisera plus jamais la notation  $\sqrt{-1}$ , mais que l'on définit le nombre  $i$ , **nombre imaginaire** dont le carré vaut  $i^2 = -1$ .

C'est environ 150 ans après Cardan que l'on utilisera cette notation, due à **Leonhard Euler**.