Fluctuation

∽

Un sac contient des billes, dont une proportion p de billes rouges. On tire au hasard et avec remise un échantillon de n billes de ce sac. Soit X_n la variable aléatoire associée au nombre de billes rouges tirées.

1. (a) Quelle loi suit X_n ?

   (b) Soit F_n la variable aléatoire définie par $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.
   Que représente-t-elle ?

2. Dans cette question, on prend $n = 100$ et $p = 0{,}2$.

   (a) Calculer l'intervalle $I = \left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

   (b) Montrer que $\mathbb{P}(F_n \in I) = \mathbb{P}(13 \leqslant X \leqslant 27)$ puis en donner une valeur à 10^{-2} près.

3. On rappelle le théorème de Moivre-Laplace :

   Avec les notations précédentes, soit Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

   Alors, quelque soit les réels a et b tels que $a < b$,

   $$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

   (a) Rappeler de quelle loi la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est la densité.

   (b) Déterminer alors la valeur de la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\mathbb{P}(-1{,}96 \leqslant Z_n \leqslant 1{,}96)$.

   (c) Montrer que $-1{,}96 \leqslant Z_n \leqslant 1{,}96 \Leftrightarrow F_n \in \left[p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

4. Comment varie l'amplitude de l'intervalle I (défini précédemment) lorsque n augmente ?