LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2016–2017

Devoir maison n°02 – mathématiques
Correction

Exercice 1

Soit u une suite qui converge vers 1. Autrement dit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
Par définition, on sait que quelque soit $a > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $1 - a < u_n < 1 + a$.
On choisit $a = 1$. Pour cette valeur de a il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
$1 - a < u_n < 1 + a$, soit $1 - 1 < u_n < 1 + 1$ et donc $0 < u_n < 2$.
En particulier $u_n > 0$, autrement dit les termes de la suite sont positifs à partir du rang n_0.

Exercice 2

1. On a :

$$\begin{aligned}(x-2)^2 \leqslant 9 - 4x &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \leqslant 9 - 4x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5 \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) \leqslant 0\end{aligned}$$

On fait un tableau de signes pour le membre de gauche de l'inéquation, qui est un produit. Les facteurs du produit étant des expressions affines avec un coefficient directeur positif ($a = 1$ dans les deux cas), on a :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$x - \sqrt{5}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + \sqrt{5}$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$.

$x^2 \leqslant 5$ n'est pas équivalent à $x \leqslant \sqrt{5}$, parce que $\sqrt{x^2} \neq x$.
En fait, $\sqrt{x^2} = |x|$ (valeur absolue).

2. On a :

$$\begin{aligned}\frac{6}{x} \leqslant x + 1 &\Leftrightarrow \frac{6}{x} - (x+1) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{6 - x(x+1)}{x} \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2 - x + 6}{x} \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 6}{x} \geqslant 0\end{aligned}$$

Il s'agit ici aussi de faire un tableau de signes, mais pour un quotient.

Le numérateur est une expression polynomiale de degré 2.

On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25 = 5^2 > 0$.

Il y a deux racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-5}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+5}{2} = 2$.

Par suite, $a = 1 > 0$, donc :

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
x^2+x-6		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2+x-6}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Par conséquent, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-3;0[\cup [2;+\infty[$.

$\dfrac{6}{x} \leqslant x+1$ n'est pas équivalent à $6 \leqslant x(x+1)$ car x n'est pas forcément positif !