Devoir maison n°03 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. L'épreuve qui consiste à observer si un membre de l'association est présent lors d'une assemblée générale est répétée 30 fois de manière indépendante. La probabilité de succès pour chaque membre est de 0,75. Ainsi X, qui est le nombre de succès, suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}75$. On note $X \sim \mathcal{B}(30; 0{,}75)$.

2. Puisqu'il faut plus de la moitié des membres présent pour que l'assemble générale ait lieu, la probabilité est $\mathbb{P}(X \geqslant 16) = 1 - \mathbb{P}(X < 16) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 15) \simeq 1 - 0{,}003 \simeq 0{,}997$.

3. La probabilité à calculer est la suivante $\mathbb{P}_{X\geqslant 16}(X \geqslant 20)$.

   On applique la formule : $\mathbb{P}_{X\geqslant 16}(X \geqslant 20) = \dfrac{\mathbb{P}(X \geqslant 16 \cap X \geqslant 20)}{\mathbb{P}(X \geqslant 16)} = \dfrac{\mathbb{P}(X \geqslant 20)}{\mathbb{P}(X \geqslant 16)}$.

   Or $\mathbb{P}(X \geqslant 20) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 19) \simeq 1 - 0{,}106 \simeq 0{,}894$.

   Alors $\mathbb{P}_{X\geqslant 16}(X \geqslant 20) \simeq \dfrac{0{,}894}{0{,}997} \simeq 0{,}897$.

Exercice 2

1. Pour étudier les variations de f, on calcule sa dérivée f'. f étant de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = 1 + 2x$, on applique la formule : $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

   Or $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$. Donc $f'(x) = \dfrac{3(1 + 2x) - 3x \times 2}{(1 + 2x)^2} = \dfrac{3}{(1 + 2x)^2}$.

   Or un carré est toujours positif, et $3 > 0$, donc quelque soit $x \geqslant 0$, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante.

2. On calcule : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Alors comme f est croissante,

   $$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

   On a bien démontré que si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) \in [0; 1]$.

3. Soit $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ ».

   Iinitialisation Soit $n = 0$. $\mathcal{P}(0)$: « $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$ ».
   Or $u_0 = 0{,}7$, et $0 \leqslant 0{,}7 \leqslant 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Étape de récurrence On suppose que pour un certain entier $n \geqslant 0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On doit démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, autrement dit que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, donc que $0 \leqslant f(u_n) \leqslant 1$ car $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Or par hypothèse de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, donc d'après la question précédente $0 \leqslant f(u_n) \leqslant 1$.
   Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

   Conclusion On a démontré que $\mathcal{P}(0)$ est vraie et que $\mathcal{P}$ est héréditaire. Alors d'après le principe de récurrence on peut affirmer que pour tout $n \geqslant 0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.