LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2016–2017

Devoir maison n°05 – mathématiques

Correction

Exercice 1

1. On lit $f(2) = 2$.

   Le nombre $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2, autrement dit le coefficient directeur de la tangente qui est tracée sur la figure.

   Pour l'obtenir on peut considérer deux points de cette tangente A et B, par exemple $A(1{,}3)$ et $B(3{,}1)$ et appliquer la formule suivante : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-3}{3-1} = -1$.

   Ainsi $f'(2) = -1$.

2. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = ax + b$ et $v(x) = \mathrm{e}^{2x-4}$.

   Alors $u'(x) = a$ et $v'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x-4}$.

   (v est de la forme e^w avec $w(x) = 2x - 4$, $w'(x) = 2$ et $v' = w'\,\mathrm{e}^w$)

   Ainsi, comme $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, on a $f'(x) = \dfrac{a\,\mathrm{e}^{2x-4} - 2(ax+b)\,\mathrm{e}^{2x-4}}{\left(\mathrm{e}^{2x-4}\right)^2} = \dfrac{a - 2b - 2ax}{\mathrm{e}^{2x-4}}$.

3. On a (en allant un peu vite) :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} f(2) = 2 \\ f'(2) = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ -3a - 2b = -1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 - 1 & (2L_1 + L_2) \\ -b = 6 - 2 & (3L_1 + 2L_2) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Ainsi $f(x) = \dfrac{3x-4}{\mathrm{e}^{2x-4}}$ et $f'(x) = \dfrac{11-6x}{\mathrm{e}^{2x-4}}$.

4. Pour étudier les variations de f on étudie le signe de f'.

   Or une exponentielle est toujours positive donc le signe de $f'(x)$ est celui de $11 - 6x$.

   Par suite, $11 - 6x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{11}{6}$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\dfrac{11}{6}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f		$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-1/3}$	$\searrow$	

5. Notons $m = \dfrac{11}{6}$.

   On remarque que $m < 2$. Or sur $[m; 2]$, f est strictement décroissante et le minimum de f est alors $f(2) = 2 > -1$, donc l'équation $f(x) = -1$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

   Démontrons alors qu'il existe une unique solution sur $[1; m]$.

   f est une fonction continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1; m]$.

   De plus, d'après le tableau de variations, f est strictement croissante sur $[1; m]$.

   Enfin, $f(1) = -1\,\mathrm{e}^{-2} \simeq -7{,}389 < -1$ et $f(m) = \dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-1/3} > 0 > -1$, donc $f(1) < -1 < f(m)$.

   Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel α solution de l'équation $f(x) = -1$ dans l'intervalle $[1; m]$, et donc dans $[1; 2]$.

   On trouve $\alpha \simeq 1{,}258$.

Exercice 2

Étant donné que f est affine, l'équation $f(f(x)) = x$ se réécrit ainsi :

$$\begin{aligned}
a(ax+b)+b = x &\Leftrightarrow a^2x + ab + b = x \\
&\Leftrightarrow a^2x - x = -ab - b \\
&\Leftrightarrow (a^2-1)x = -b(a+1) \\
&\Leftrightarrow (a-1)(a+1)x = -b(a+1)
\end{aligned}$$

Pour commencer on distingue deux cas :

- Si $a + 1 = 0$, autrement dit si $a = -1$, alors l'équation équivaut à $0 = 0$ qui est toujours vraie. Alors $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.
- Si $a + 1 \neq 0$, alors l'équation équivaut à $(a-1)x = -b$. Deux cas nouveaux apparaissent alors :
  - Si $a - 1 = 0$, autrement dit si $a = 1$, alors l'équation équivaut à $0 = -b$.
    Il y a alors deux nouveaux cas :
    - Si $b = 0$ alors l'équation équivaut à $0 = 0$ qui est toujours vraie et $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.
    - Si $b \neq 0$ alors l'équation n'est au contraire jamais vraie et $\mathcal{S} = \varnothing$.
  - Si $a - 1 \neq 0$, alors l'équation équivaut à $x = \dfrac{-b}{a-1} = \dfrac{b}{1-a}$ et n'a alors qu'une seule solution : $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{b}{1-a}\right\}$.

Pour résumer :

<table>
<tr><td>$a = -1$</td><td colspan="2">$\mathcal{S} = \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a = 1$</td><td>$b = 0$</td><td>$\mathcal{S} = \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$b \neq 0$</td><td>$\mathcal{S} = \varnothing$</td></tr>
<tr><td>$a \notin \{-1; 1\}$</td><td colspan="2">$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{b}{1-a}\right\}$</td></tr>
</table>