LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2016–2017

Devoir maison n°06 – mathématiques

Donné le 08/11/2016 – à rendre le 15/11/2016

Exercice 1

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

   Rappeler l'interprétation graphique du nombre dérivé de f en a, $f'(a)$.

   Expliquer ensuite pourquoi la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour équation :
   $$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

2. On cherche ici une fonction f, strictement positive, croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé possède la propriété suivante :

   > « *Pour tout point M de la courbe, si P est le point d'intersection de la tangente T en M avec l'axe des abscisses et H est le projeté orthogonal de M sur cet axe, alors la distance PH est égale à* 1. »

   La longueur PH est appelée *sous-tangente* en M à $\mathscr{C}$.

   La fonction f cherchée a donc une courbe à sous-tangente constante (égale à 1).

   (a) Faire une figure représentant la situation décrite par la propriété.

   (b) On note a l'abscisse d'un point quelconque M de $\mathscr{C}$.

   À l'aide de la question précédente, démontrer alors que l'abscisse de P vaut $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$.

   (c) En déduire que la fonction f recherchée vérifie l'égalité $\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right| = 1$.

   (d) En déduire que f vérifie l'égalité $f' = f$.

   (e) Donner alors deux exemples de fonctions f (différentes) qui satisfont la propriété.