Devoir maison n°06 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. Le nombre $f'(a)$ est graphiquement le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

   Par conséquent, l'équation de cette tangente est de la forme $y = mx + p$ avec $m = f'(a)$.

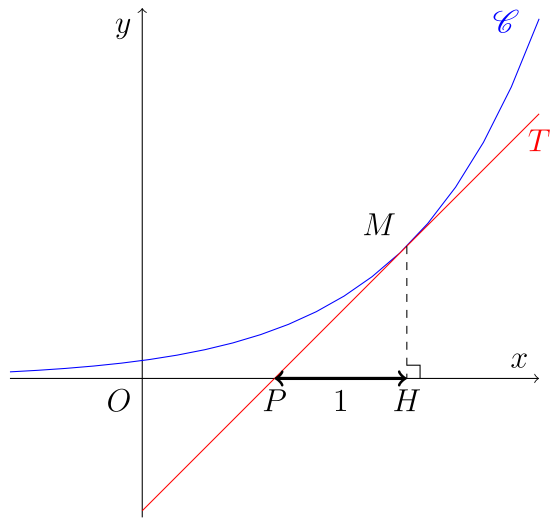
   Il reste à déterminer p. Pour cela, on utilise le fait que la tangente passe par le point de la courbe d'abscisse a, dont les coordonnées sont $(a; f(a))$.

   Cela signifie que ces coordonnées satisfont l'équation, autrement dit que : $f(a) = f'(a) \times a + p$.

   On trouve alors que $p = f(a) - f'(a) \times a$. Par suite, l'équation de la tangente est :

$$\begin{aligned} y &= f'(a)x + (f(a) - f'(a) \times a) \\ &= f'(a)x - f'(a)a + f(a) \\ &= f'(a)(x - a) + f(a) \end{aligned}$$

2. (a) La situation est la suivante :



   (b) On sait que l'équation de la tangente est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Le point P appartient à cette tangente donc ses coordonnées satisfont l'équation. On sait de plus que P est sur l'axe des abscisses, donc a pour ordonnée $y_P = 0$. Ainsi [1] :

$$\begin{aligned} 0 = f'(a)(x_P - a) + f(a) &\Leftrightarrow -f(a) = f'(a)(x_P - a) \\ &\Leftrightarrow -\frac{f(a)}{f'(a)} = x_P - a \\ &\Leftrightarrow a - \frac{f(a)}{f'(a)} = x_P \end{aligned}$$

   Ainsi on a bien $x_P = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$.

1. on a $f'(a) \neq 0$, sans quoi la tangente n'intersecte pas l'axe des abscisses.

(c) On a $H(a;0)$ et $P\left(a-\dfrac{f(a)}{f'(a)};0\right)$. Puisque $PH=1$, cela signifie que $PH^2=1$, soit que :

$$(x_H-x_P)^2+(y_H-y_P)^2=\left(a-a+\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2+(0-0)^2=1$$

Autrement dit

$$\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2=1$$

Soit

$$\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|=1$$

(d) Puisque f est strictement positive et que f' est strictement positive également (car f est croissante), on a $\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right|=\dfrac{f(a)}{f'(a)}$. Donc, quelque soit $a\in\mathbb{R}$, $\dfrac{f(a)}{f'(a)}=1$, soit $f(a)=f'(a)$. Autrement dit, $f=f'$.

(e) Le premier exemple est la fonction exponentielle : $x\mapsto \mathrm{e}^x$.
Mais on peut donner aussi $x\mapsto \mathrm{e}^{x+k}$ ($k\in\mathbb{R}$ constante) ou $x\mapsto C\,\mathrm{e}^x$ ($C\in]0;+\infty[$).
Ces deux formes reviennent en fait au même puisque $\mathrm{e}^{x+k}=\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^k$, et il suffit de définir $C=\mathrm{e}^k>0$ (réciproquement, tout nombre positif s'écrit comme une exponentielle).

Remarque Si on ne suppose pas f strictement croissante, on a la possibilité d'avoir $f'=-f$.
Un exemple est alors $x\mapsto e^{-x}$.