Devoir maison n°07 – mathématiques
Correction (non détaillée)

Exercice 1

1. Pour $z = 0$, $z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas solution de (E).

2. En posant $u = z + \dfrac{1}{z}$ (étant donné $z \neq 0$), on obtient :

$$\begin{aligned} u^2 + 2u - 3 = 0 &\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} + 2z + \frac{2}{z} - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow z^4 + 2z^2 + 1 + 2z^3 + 2z - 3z^2 = 0 \qquad (\times z^2 \neq 0) \\ &\Leftrightarrow z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 0 \quad (E) \end{aligned}$$

On a bien l'équivalence demandée.

3. L'équation $u^2 + 2u - 3 = 0$ est du second degré à coefficients réels.
On calcule : $\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$.
L'équation a donc deux solutions réelles $u_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$ et $u_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$.

4. On réécrit dans un premier temps : $-3 = z + \dfrac{1}{z} \Leftrightarrow z^2 + 3z + 1 = 0$ et $1 = z + \dfrac{1}{z} \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$.
On résout ces deux équations du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$.
Pour la première, $\Delta = 5 > 0$ et il y a deux solutions réelles $z_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.
Pour la seconde, $\Delta = -3 < 0$ et il y a deux solutions complexes conjuguées $z_3 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.
L'ensemble des solutions de l'équation de départ est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-3-\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-i\sqrt{3}}{2}; \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Exercice 2
À l'image d'une équation du second degré à coefficients réels, on calcule le discriminant :
$\Delta = (3-4i)^2 - 4 \times i \times (-5+i) = \cdots = -3 - 4i$.
On cherche un nombre complexe $r = a + bi$ avec a et b réels tel que $r^2 = -3 - 4i$.
On a donc $a^2 - b^2 + 2abi = -3 - 4i$, donc $\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \end{cases}$.
Ainsi, $b = \dfrac{-2}{a}$ (a est non nul car sinon r^2 serait un réel).
On obtient alors $a^2 - \dfrac{4}{a^2} = -3$, donc $a^4 + 3a^2 - 4 = 0$ (en multipliant par $a^2 \neq 0$).
Il s'agit d'une équation du second degré en a^2 à coefficients réels.
On obtient $a^2 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$ (l'autre solution, étant négative, est à rejeter puisque $a \in \mathbb{R}$).

En choisissant $a = 1$, on obtient alors $b = -2$ (en faisant le choix opposé on obtiendra les mêmes solutions à la fin).
Alors le premier discriminant vaut $\Delta = -3 - 4i = (1 - 2i)^2$.
On applique la formule habituelle pour trouver les solutions :
$z_1 = \dfrac{-(3-4i) - (1-2i)}{2i} = \dfrac{-4-6i}{2i} = 3 + 2i$
$z_2 = \dfrac{-(3-4i) + (1-2i)}{2i} = \dfrac{-2+2i}{2i} = 1 + i$
Ainsi, $\mathcal{S} = \{3 + 2i; 1 + i\}$.