

Devoir maison n°09 – mathématiques  
Correction**Exercice 1**

1. On calcule :  $u_1 = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$  ;  $u_2 = u_1 + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$   
et  $u_3 = u_2 + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ .

2. On remarque que :

$$u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i \times (i+1)} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i \times (i+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Par suite,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0$  car  $n \geq 0$ . Par conséquent,  $u$  est croissante.

3. (a) On a :  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$ .  
(b) On a alors :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i \times (i+1)} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) - \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) - \left( \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} \right) && \text{(décalage de 1)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

En effet les termes s'annulent successivement par soustraction, sauf le premier de la première somme et le dernier de la seconde.

**Remarque** On peut aussi démontrer que  $u_n = \frac{n}{n+1}$  par récurrence.

- (c) Comme  $n+1 > 0$ , on obtient  $-\frac{1}{n+1} < 0$  puis  $1 - \frac{1}{n+1} < 1$  :  $u$  est majorée par 1.

4. Comme  $u$  est croissante et majorée d'après les questions précédentes, elle converge.

On aussi déterminer sa limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

**Exercice 2**

1. Ce qui est perdu est le poids de 2 points de DM dans la moyenne, à savoir :

$$\frac{\frac{2}{6}}{1+1+1+1+4} = \frac{\frac{1}{3}}{8} = \frac{1}{24} \simeq 0,04$$

2. (a) Au lieu de 2 points, on estime le poids de 12 points de DM dans la moyenne :

$$\frac{\frac{12}{6}}{1+1+1+1+4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

- (b) Il s'agit de résoudre :  $\frac{1}{4} = \frac{4x}{8} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 0,5$ .

Une note de 12 en DM a donc le même poids qu'un demi-point sur le devoir de type bac.