Devoir maison n°10 – mathématiques
Correction

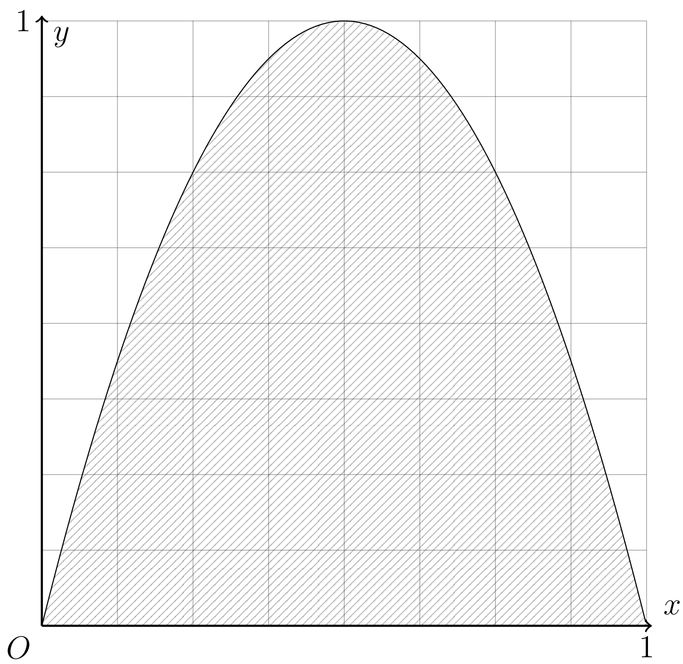
Exercice 1

1. (a) f est une fonction polynomiale de degré 2, dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ est une parabole.
   L'abscisse du sommet de la parabole est $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2 \times (-4)} = \dfrac{1}{2}$.
   D'autre part, $a = -4 < 0$ donc les branches sont tournées vers le bas.
   On a alors le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
variations de f	0 ↗	1	↘ 0

   (b)

   (c)



   On obtient $\alpha = \dfrac{2}{3}$ avec la calculatrice.

2. Pour que M appartienne à D il faut que $y \leqslant f(x)$, car le point doit être situé en dessous de la courbe $\mathcal{C}$.

3. (a) La probabilité pour qu'un point appartienne à D est $\dfrac{\text{Aire de } D}{\text{Aire de } S} = \dfrac{\alpha}{1} = \alpha$ et on répète l'expérience N fois de manière indépendante. Le nombre de succès X suit alors la loi binomiale de paramètres $n = N$ et $p = \alpha$.
   (b) On a $E(X) = np = N\alpha$.

4. Cet algorithme demande une valeur de N puis fait l'expérience décrite précédemment. À chaque fois que le point est dans le domaine, l'algorithme ajoute 1 à un compteur u qui démarre à 0. La valeur finale de u est alors celle de la variable aléatoire X.

   L'algorithme affiche alors la fréquence $\dfrac{X}{N}$, soit une valeur approchée de $p = \alpha$.

   Avec une calculatrice on obtient $A = 0{,}68$ ou $A = 0{,}632$ (par exemple).

5. Pour obtenir un nombre choisi aléatoirement dans un intervalle $[a,b]$, on peut faire la chose suivante : $(b-a)RANDOM + a$.

6. (a) L'expression $g(x) = x^2 - 4x + 5$ est polynomiale de degré 2.

   L'abscisse du sommet est ici $x = \dfrac{-b}{2a} = 2$, et $a = 1 > 0$.

   Donc :

x	2	5
variations de g	1 ↗	10

   (b) Voici l'algorithme que l'on peut proposer pour $\beta = \displaystyle\int_2^5 g(x)dx$:

Saisir N
Saisir A
Saisir B
Saisir M
u prend la valeur 0
Pour I allant de 1 à N Faire
    x prend la valeur $(B-A)\times$RANDOM$+A$
    y prend la valeur $M\times$RANDOM
    Si $y \leqslant g(x)$ Alors
        u prend la valeur $u+1$
    FinSi
FinPour
A prend la valeur $\dfrac{u}{N} \times (B-A) \times M$
Afficher A

On rappelle que la probabilité d'être dans le domaine vaut $\dfrac{\text{Aire de } D}{\text{Aire de } S}$.
Il faut donc multiplier la fréquence par l'aire du domaine S dans lequel on prend les points.
On prend $N = 500$, $A = 2$, $B = 5$ et $M = 10$ (maximum de g sur $[2;5]$).
On obtient par exemple 12,12 ou 11,7.
La valeur exacte est 12.