Devoir maison n°11 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. Un point de la courbe $\mathscr{C}$ a pour coordonnées $(x; f(x))$.

   Les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses ont pour ordonnée 0.

   On résout donc

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x+2)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2) = 0 \text{ car } e^{-x} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

   Ainsi le point $A(-2; 0)$ est l'unique point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

   Le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées est le point $B(0; f(0))$.

   On calcule donc : $f(0) = (0+2)e^{-0} = 2 \times 1 = 2$. Ainsi, B a pour coordonnées $(0; 2)$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

   D'autre part, $f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x} = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{2}{e^x}$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 + 0 = 0$.

   Ainsi donc, $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 0$ (autrement dit l'axe des abscisses) pour asymptote horizontale en $+\infty$.

Exercice 2

1. (a) Comme $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to 0} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

   D'autre part, $f(x) = (\ln x)^2 \left(\dfrac{1}{\ln x} - 1 \right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

   Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln x} - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

   (b) La limite en 0 étant infinie, $\mathcal{C}$ admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2. Pour étudier les variations de f, on dérive tout d'abord la fonction f.

   $x \mapsto (\ln x)^2$ est de la forme u^2 avec $u(x) = \ln x$.

   Alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et comme $(u^2)' = 2u'u$, on a $f' = u' - 2u'u$.

   Donc $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x} \ln x = \dfrac{1 - 2\ln x}{x}$.

   Comme f est définie sur $]0; +\infty[$, on a $x > 0$ donc il suffit d'étudier le signe de $1 - 2\ln x$.

   Or $1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < \sqrt{e}$.

   Ainsi on obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Comme $\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2}\ln e = \dfrac{1}{2}$, alors $f(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

Le maximum de f est donc $\dfrac{1}{4}$.

3. (a) On doit résoudre $f(x) = 0$. Or $f(x) = \ln x(1 - \ln x)$, donc $f(x) = 0$ si et seulement si $\ln x = 0$ ou $\ln x = 1$, autrement dit si $x = 1$ ou $x = e$.

   Les points d'intersections entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses ont pour coordonnées (1,0) et $(e;0)$.

   (b) Pour connaître la position relative entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses il suffit de connaître le signe de $f(x) = \ln x(1 - \ln x)$. Or ln est croissante et $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e$. Ainsi :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1 - \ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

   Conclusion : $\mathcal{C}$ est au dessus de l'axe des abscisses sur $[1;e]$, en-dessous ailleurs.