

Devoir maison n°12 – mathématiques
Donné le 24/01/2017 – à rendre le 31/01/2017

Exercice 1

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$.
En déduire le signe de $f(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 1 - x$.
En déduire le signe de $g(x)$.
3. Montrer que, pour tout réel $x > 1$:

$$1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1$$

4. (a) Soit n un entier, $n \geq 2$. En posant $x = e^{\frac{1}{n}}$, montrer que :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

Aide : on admettra que pour u et v positifs, $u < v \Leftrightarrow u^n < v^n$.

- (b) Écrire l’encadrement de e obtenu pour $n = 2$.
5. (a) Recopier et compléter l’algorithme suivant afin qu’il affiche en sortie un encadrement de e d’amplitude inférieure ou égale à 10^{-p} .

Variables :
 a et b sont des nombres réels
 k et p sont des entiers

Entrée :
 Saisir p

Initialisation :
 k prend la valeur 2
 a prend la valeur 9/4
 b prend la valeur 4

Traitement :
 Tant que Faire
 | k prend la valeur
 | a prend la valeur
 | b prend la valeur
 FinTant

Sortie :
 Afficher a et b

- (b) Programmer cet algorithme et l’exécuter avec $p = 3$. Que constate-t-on ?