

Devoir maison n°12 – mathématiques  
Donné le 24/01/2017 – à rendre le 31/01/2017

**Exercice 1**

1. Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$ .  
En déduire le signe de  $f(x)$ .
2. Étudier les variations de la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \ln(x) + 1 - x$ .  
En déduire le signe de  $g(x)$ .
3. Montrer que, pour tout réel  $x > 1$  :

$$1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1$$

4. (a) Soit  $n$  un entier,  $n \geq 2$ . En posant  $x = e^{\frac{1}{n}}$ , montrer que :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

Aide : on admettra que pour  $u$  et  $v$  positifs,  $u < v \Leftrightarrow u^n < v^n$ .

- (b) Écrire l’encadrement de  $e$  obtenu pour  $n = 2$ .
5. (a) Recopier et compléter l’algorithme suivant afin qu’il affiche en sortie un encadrement de  $e$  d’amplitude inférieure ou égale à  $10^{-p}$ .

**Variables :**  
*a* et *b* sont des nombres réels  
*k* et *p* sont des entiers

**Entrée :**  
 Saisir *p*

**Initialisation :**  
*k* prend la valeur 2  
*a* prend la valeur 9/4  
*b* prend la valeur 4

**Traitement :**  
 Tant que ..... Faire  
     | *k* prend la valeur .....  
     | *a* prend la valeur .....  
     | *b* prend la valeur .....  
 FinTant

**Sortie :**  
 Afficher *a* et *b*

- (b) Programmer cet algorithme et l’exécuter avec  $p = 3$ . Que constate-t-on ?