LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2016–2017

Devoir maison n°12 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On calcule : $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$.
   Puisque $x^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x-1$, et $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$, donc :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
variations de f	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	

   D'après le tableau de variations, $f(1)=0$ et 0 est le minimum de f sur son ensemble de définition. Donc $f(x)$ est toujours positive.

2. On calcule : $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.
   Comme $x>0$, $g'(x)$ est du signe de $1-x$, soit l'opposé de celui de $f'(x)$. Alors :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
variations de g	||	$\nearrow$	0	$\searrow$	

   Ici, $g(1)=0$ est le maximum de g, donc $g(x)$ est toujours négative.

3. D'après les questions précédentes, quelque soit $x>0$,

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant 1 - \frac{1}{x}$$
$$g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 - x \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant x - 1$$

   Or les égalités ne sont vraies que pour $x=1$, donc quelque soit $x>1$ on a donc bien :

$$1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1$$

4. (a) Quelque soit l'entier naturel n supérieur à 2, $\dfrac{1}{n} > 0$, donc $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} > \mathrm{e}^0$, soit $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} > 1$.
   L'encadrement obtenu à la question précédente est donc vrai pour $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, et :

$$1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} < \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right) < \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1$$

Or $\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{1}{n}$. On a donc d'une part :

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} < \frac{1}{n} &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \\
&\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{\mathrm{e}} && \text{(en utilisant l'aide)} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} > \mathrm{e} && \text{(décroissance de la fonction inverse sur }]0;+\infty[\text{)}
\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} < \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \\
&\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} && \text{(en utilisant l'aide)}
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

(b) Pour $n = 2$,

- $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$.
- $\dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

Donc $\dfrac{9}{4} < \mathrm{e} < 4$.

5. (a) L'algorithme se complète ainsi :

Variables :
 a et b sont des nombres réels
 k et p sont des entiers
Entrée :
 Saisir p
Initialisation :
 k prend la valeur 2
 a prend la valeur $9/4$
 b prend la valeur 4
Traitement :
 Tant que $b - a > 10^{-p}$ Faire
  k prend la valeur $k + 1$
  a prend la valeur $(1 + 1/k)^k$
  b prend la valeur $1/(1 - 1/k)^k$
 FinTant
Sortie :
 Afficher a et b

(b) Avec $p = 3$, le résultat met beaucoup de temps à venir.
Cette méthode n'est donc pas efficace pour obtenir une valeur approchée de e.
On obtient quand même $a \simeq 2{,}71778$ et $b \simeq 2{,}71878$, quand $k = 2\ 719$!