Devoir maison n°13 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On pose $z = a+bi$ avec a et b réels. Alors $z^2 = 4i \Leftrightarrow a^2-b^2+2abi = 4i \Leftrightarrow a^2-b^2 = 0$ et $2ab = 4$.

   On a donc $ab = 2$. Comme ab est positif, on en déduit que a et b sont de même signe.

   Puis comme $a^2 = b^2$, alors nécessairement $a = b$, puis $a^2 = 2$.

   On obtient $a = b = \sqrt{2}$ ou $a = b = -\sqrt{2}$.

   Autrement dit $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ou $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

2. On a : $z^2 - 6z + 9 - 4i = 0 \Leftrightarrow (z-3)^2 = 4i$.

   D'après la question précédente on a donc $z - 3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ou $z - 3 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

   Ainsi,
   $$\mathcal{S} = \{3 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}; 3 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}\}$$

Exercice 2

Remarque : Il y a plusieurs manières d'aboutir au résultat, cette correction n'en donne qu'une.
M, N et P sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires, autrement dit si $z_{\overrightarrow{MP}} = kz_{\overrightarrow{MN}}$ avec $k \in \mathbb{R}$ ou $z_{\overrightarrow{MN}} = 0$.
Or $z_{\overrightarrow{MN}} = z_N - z_M = iz - z = z(i-1)$ et $z_{\overrightarrow{MP}} = z_P - z_M = z^2 - z = z(z-1)$.
Tout d'abord, $z_{\overrightarrow{MN}} = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (car $i - 1 \neq 0$).
On remarque au passage que si $z = 0$, alors $M = N = P = O$: les points sont confondus avec l'origine du repère, donc alignés.
Supposons maintenant $z \neq 0$. Alors $z_{\overrightarrow{MP}} = kz_{\overrightarrow{MN}} \Leftrightarrow z - 1 = k(i-1) \Leftrightarrow z = 1 - k + ki$.
En posant $y = k$, et $x = 1 - k$, alors $z = x + iy$ avec $x = 1 - y$, autrement dit $y = 1 - x$.
Le point M est donc situé sur la droite d'équation $y = 1 - x$.
Réciproquement, si $M(x+iy)$ est situé sur la droite d'équation $y = 1-x$, Alors $z = z_M = x+i(1-x)$, et : $z - 1 = (x-1) - i(x-1) = (x-1)(1-i) = (1-x)(i-1)$. En posant $k = 1 - x$ on voit que $z - 1 = k(i-1)$, ce qui équivaut à $z_{\overrightarrow{MP}} = kz_{\overrightarrow{MN}}$.
L'ensemble des points M tels que M, N et P sont alignés est donc la droite d'équation $y = 1 - x$ et le point O, origine du repère.

Exercice 3

Pour un individu pris au hasard dans la population, on définit les événements suivants :

V **:** « L'individu a été vacciné »

M **:** « L'individu est malade »

Les données de l'énoncé nous permettent alors d'affirmer que :

$$\mathbb{P}(V) = \frac{1}{4},\ \mathbb{P}_V(M) = \frac{1}{12} \text{ et } \mathbb{P}_M(V) = \frac{1}{5}$$

puis que $\mathbb{P}(\overline{V}) = \dfrac{3}{4}$, $\mathbb{P}_V(\overline{M}) = \dfrac{11}{12}$ et $\mathbb{P}_M(\overline{V}) = \dfrac{4}{5}$.
On a $\mathbb{P}(V \cap M) = \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(M) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(V)$.
Alors : $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{12} = \mathbb{P}(M) \times \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \mathbb{P}(M) = \dfrac{5}{48}$.

par suite, $\mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \dfrac{\mathbb{P}(\overline{V} \cap M)}{\mathbb{P}(\overline{V})} = \dfrac{\mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(\overline{V})}{\mathbb{P}(\overline{V})} = \dfrac{\dfrac{5}{48} \times \dfrac{4}{5}}{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{9}$.

On observe alors que $\dfrac{1}{12} = \mathbb{P}_V(M) < \mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \dfrac{1}{9}$: la probabilité d'être malade est plus faible si l'individu est vacciné que s'il ne l'est pas, donc le vaccin semble (au moins un peu) efficace.