LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2016–2017

Devoir maison n°16 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} && \text{(Chasles)}\\
&= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} && \text{(les côtés opposés des carrés sont parallèles)}\\
\overrightarrow{EJ} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AJ} && \text{(Chasles)}\\
&= -\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \\
\overrightarrow{IF} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} && \text{(Chasles)}\\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} && (ABFE \text{ est un carré})\\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}
\end{aligned}$$

2. On exprime à l'aide de la question précédente :

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IF}$$

3. De la question précédente, on déduit que $\overrightarrow{IF}$ a des coordonnées dans le repère $(E; \overrightarrow{EG}; \overrightarrow{EJ})$ du plan (EGJ). Autrement dit, $\overrightarrow{IF}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EJ}$ sont coplanaires.

   (On peut aussi écrire que $\overrightarrow{IF} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{0}$, avec $(1; -\frac{2}{3}; -1) \neq (0{,}0{,}0)$).

   Ainsi dit $\overrightarrow{IF}$ est coplanaire avec les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EJ}$ du plan (EGJ).

   On en déduit que (IF) est parallèle au plan (EGJ).

Exercice 2

1. On étudie les variations de f_a, et pour cela on calcule tout d'abord sa dérivée : ${f_a}'(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2$.

   Pour étudier le signe de la dérivée on résout :

$$\mathrm{e}^{x-a} - 2 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x-a} > 2 \Leftrightarrow x - a > \ln(2) \Leftrightarrow x > a + \ln(2)$$

   Ainsi, f_a est décroissante sur $]-\infty; a + \ln(2)]$ et croissante sur $[a + \ln(2); +\infty[$.

   La fonction admet donc bien un minimum, en $a + \ln(2)$, dont la valeur est :

$$\begin{aligned}
f_a(a + \ln(2)) &= \mathrm{e}^{a+\ln(2)-a} - 2(a + \ln(2)) + \mathrm{e}^a\\
&= \mathrm{e}^{\ln(2)} - 2a - 2\ln(2) + \mathrm{e}^a\\
&= 2 - 2a - 2\ln(2) + \mathrm{e}^a\\
&= \mathrm{e}^a - 2a + 2 - 2\ln(2)
\end{aligned}$$

2. On cherche à savoir si le minimum de f_a peut être minimal. Il s'agit donc d'étudier les variations de la fonction (de la variable a) $g : a \mapsto \mathrm{e}^a - 2a + 2 - 2\ln(2)$.

   On dérive : $g'(a) = \mathrm{e}^a - 2$. Puis on résout : $g'(a) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^a - 2 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^a > 2 \Leftrightarrow a > \ln(2)$.

   Ainsi, g est décroissante sur $]-\infty; \ln(2)]$ puis croissante sur $[\ln(2); +\infty[$.

   Par conséquent, g admet un minimum, qui est alors le plus petit minimum possible des f_a.

   Sa valeur est $g(\ln(2)) = \mathrm{e}^{\ln(2)} - 2\ln(2) + 2 - 2\ln(2) = 2 + 2 - 4\ln(2) = 4 - 4\ln(2)$.