

Devoir maison n°17 – mathématiques
Donné le 04/04/2017 – à rendre le 25/04/2017

Exercice 1

Soit (I_n) la suite définie, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, par $I_n = \int_1^n e^{-t} \sqrt{1+t} dt$.

1. Démontrer que la suite (I_n) est croissante.
2. Soit, pour tout entier naturel n non nul, $J_n = \int_1^n e^{-t}(1+t)dt$.
 - (a) Comparer I_n et J_n .
 - (b) Vérifier que la fonction G définie sur \mathbb{R} par $G(t) = (-t - 2)e^{-t}$ est une primitive de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(t) = (1+t)e^{-t}$.
 - (c) Calculer J_n .
 - (d) Démontrer que la suite (J_n) est majorée.
3. Démontrer que la suite (I_n) est convergente.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Calculer $f(1)$.
2. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$; donner l'expression de $f'(x)$.
3. Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
4. (a) Établir que, pour tout nombre réel $x \geq 1$, $f(x) \geq e \ln(x)$.
(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
5. (a) Établir que, pour tout nombre réel $x \in]0; 1]$, $f(x) \leq e^x \ln(x)$.
(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
6. Établir le tableau de variations de f .