Devoir maison n°17 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. Par linéarité de l'intégrale, on a : $I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$.
   Or $\mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t} > 0$, donc l'intégrale est positive, et l'on en déduit que (I_n) est croissante.
2. (a) Pour tout $t \geqslant 1$, $1 + t \geqslant 1$. Par suite, la fonction racine carré étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on obtient $\sqrt{1+t} \geqslant 1$.
   Ensuite, $\sqrt{1+t} > 0$, donc $\sqrt{1+t}^2 \geqslant \sqrt{1+t}$, soit $(1+t) \geqslant \sqrt{1+t}$.
   De même, $\mathrm{e}^{-t} > 0$, donc $\mathrm{e}^{-t}(1+t) \geqslant \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}$.
   En intégrant sur $[1; n]$, on obtient $J_n \geqslant I_n$.
   (b) On dérive la fonction G, qui est de la forme uv avec $u(t) = -t - 2$ et $v(t) = \mathrm{e}^{-t}$.
   Alors $u'(t) = -1$ et $v'(t) = -\mathrm{e}^{-t}$.
   Ainsi, $G'(t) = (u'v + uv')(t) = -\mathrm{e}^{-t} + (t+2)\mathrm{e}^{-t} = (t+1)\mathrm{e}^{-t} = g(t)$.
   G est donc bien une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
   (c) On a $J_n = \displaystyle\int_1^n g(t)\mathrm{d}t = [G(t)]_1^n = G(n) - G(1) = (-n-2)\mathrm{e}^{-n} + 3\mathrm{e}^{-1}$.
   (d) Comme $\mathrm{e}^{-n} > 0$ et $(-n-2) \leqslant 0$, on a $(-n-2)\mathrm{e}^{-n} \leqslant 0$, puis $J_n \leqslant 3\mathrm{e}^{-1}$:
   J_n est majorée par $3\mathrm{e}^{-1}$.
3. On peut déduire des questions précédentes que pour tout $n \geqslant 1$, $I_n \leqslant J_n \leqslant 2\mathrm{e}^{-1}$.
   Ainsi la suite (I_n) est majorée. Or or sait qu'elle est aussi croissante.
   On en déduit que (I_n) est convergente.

Exercice 2

1. On a $f(1) = \displaystyle\int_1^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t = 0$ (bornes identiques).
2. On a $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ d'après le cours.
3. Comme $f'(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$, on en déduit que f est strictement croissante sur cet intervalle.
4. (a) L'exponentielle étant croissante sur $[1; +\infty[$, quelque soit $t \geqslant 1$, $\mathrm{e}^t \geqslant \mathrm{e}^1$, soit $\mathrm{e}^t \geqslant \mathrm{e}$.
   Comme $t > 0$, on en déduit $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}}{t}$. On intègre sur $[1; x]$ (avec $x \geqslant 1$) : $f(x) \geqslant \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}}{t}\mathrm{d}t$.
   Or $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}}{t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}[\ln t]_1^x = \mathrm{e}(\ln x - \ln 1) = \mathrm{e}\ln x$.
   Ainsi on a bien $f(x) \geqslant \mathrm{e}\ln x$.
   (b) On sait que $e > 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Donc pas comparaison, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
5. (a) Soit $x \in]0; 1]$ Par croissance de l'exponentielle sur $]0; 1]$ on a, pour tout $t \in [x; 1]$, $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^t$.
   Comme $t > 0$, en intégrant sur $[x; 1]$ on obtient : $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^x}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$.
   Par suite, $\displaystyle -\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^x}{t}\mathrm{d}t \geqslant -\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$, puis $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^x}{t}\mathrm{d}t \geqslant \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$ (changement des bornes).
   Or $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^x}{t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\ln(x)$.
   finalement, $\mathrm{e}^x\ln(x) \geqslant f(x)$, autrement dit $f(x) \leqslant \mathrm{e}^x\ln(x)$.

(b) On sait que $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 0} \mathrm{e}^x = 1$, donc $\lim_{x \to 0} \mathrm{e}^x \ln(x) = -\infty$.
Puis par comparaison, $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

6. Le tableau de variations de f est le suivant :

x	0	$+\infty$
variations de f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$