Devoir maison n°18 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. La proposition est vraie.
   En effet, puisque $\mu = \sigma$, $\mathbb{P}(X \leqslant \sigma) = \mathbb{P}(X \leqslant \mu) = 0{,}5$ et $\mathbb{P}(X > \sigma) = \mathbb{P}(X > \mu) = 0{,}5$, par symétrie de la courbe de la fonction de densité autour de la droite d'équation $x = \mu$.
2. La réciproque de P est : « Si $\mathbb{P}(X \leqslant \sigma) = \mathbb{P}(X > \sigma)$ alors $\mu = \sigma$ ».
   Cette réciproque est vraie.
   En effet, Si $\mathbb{P}(X \leqslant \sigma) = \mathbb{P}(X > \sigma)$, comme on a aussi $\mathbb{P}(X > \sigma) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant \sigma)$, on en déduit que $\mathbb{P}(X \leqslant \sigma) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant \sigma)$, et donc que $\mathbb{P}(X \leqslant \sigma) = 0{,}5$.
   Or la valeur de σ solution de cette équation est $\sigma = \mu$.

Exercice 2

La fonction f est continue positive sur $[-a; a]$ (c'est une exponentielle).
Pour que f soit une fonction de densité, il faut que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 1$. Or

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t &= \int_{-a}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{(Chasles)}\\
&= \int_{-a}^{0} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\
&= \left[\mathrm{e}^{t}\right]_{-a}^{0} + \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_{0}^{a}\\
&= \mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{-a} + \left(-\mathrm{e}^{-a}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-0}\right)\\
&= 2\,\mathrm{e}^{0} - 2\,\mathrm{e}^{-a}\\
&= 2 - 2\,\mathrm{e}^{-a}
\end{aligned}$$

On doit alors résoudre :

$$\begin{aligned}
2 - 2\,\mathrm{e}^{-a} = 1 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow -a = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)\\
&\Leftrightarrow a = \ln 2
\end{aligned}$$

Ainsi, pour que f soit une fonction de densité, il faut que $a = \ln 2$.

Exercice 3

On peut tout d'abord calculer I_n, $\dfrac{1}{x \ln x}$ étant de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \dfrac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
I_n &= [\ln(\ln x)]_{2^n}^{2^{n+1}}\\
&= \ln(\ln 2^{n+1}) - \ln(\ln 2^n)\\
&= \ln((n+1)\ln 2) - \ln(n \ln 2)\\
&= \ln\left(\frac{(n+1)\ln 2}{n \ln 2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\\
&= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Or $n \mapsto \frac{1}{n}$ est décroissante, donc il en est de même pour $n \mapsto 1 + \frac{1}{n}$.
En appliquant la fonction ln croissante, on en déduit que $n \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est décroissante.
Autrement dit, (I_n) est décroissante.
Sinon, on exprime :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n+2}{n+1} \times \frac{n}{n+1}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right) \\
&= \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)
\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc $1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$ et $\ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) < 0$.
On en déduit que $I_{n+1} - I_n < 0$, donc que la suite est décroissante.