

Devoir maison n°19 – mathématiques
Donné le 16/05/2017 – à rendre au plus tard le 30/05/2017

Ce devoir est facultatif. Chaque exercice est facultatif. Il est donné deux semaines pour le rendre. Toute trace de recherche utile à la résolution d'un exercice sera comptée. Le travail doit être fait seul, sans aide et sans recherche (livres, Internet, ...) extérieure en dehors de questions posées au professeur.

En cas de doute sur la réalisation personnelle d'une solution, celle-ci ne sera pas comptée.

La manière de compter ce devoir permet d'augmenter la moyenne du trimestre (d'au maximum 0,6).

Méthode Pour montrer qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F (donc que $E \subset F$), on considère un élément (quelconque) x de E , et on démontre que $x \in F$.

Exercice 1

Soit A , B et C trois ensembles.

Démontrer que si $A \cup C \subset A \cup B$ et $A \cap C \subset A \cap B$, alors $C \subset B$.

Exercice 2

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$.

Exercice 3

Soit f une fonction définie et continue sur $[0; 1]$.

On suppose que f est à valeurs dans $[0; 1]$ (*i.e.* quelque soit $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$).

Démontrer qu'il existe un réel x tel que $f(x) = x$.

Exercice 4

Soit f une fonction définie sur $[0; 1]$ et à valeurs dans $[0; 1]$.

On suppose que quelque soit x et y dans $[0; 1]$, on a $|x - y| \leq |f(x) - f(y)|$.

Démontrer que f est nécessairement l'une des deux fonctions suivantes : $x \mapsto x$ ou $x \mapsto 1 - x$.