LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2016–2017

Devoir surveillé n°1 – mathématiques
27/09/2016

Exercice 1 (Restitution organisée de connaissances – 3 points)
Démontrer la propriété de cours suivante : Soit u et v deux suites.
Si, à partir d'un certain rang, $v_n \geqslant u_n$ et si $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 2 (16 points)
Partie A
On considère l'algorithme suivant, dont les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

```
Entrée :
    Saisir N
Traitement :
    U prend la valeur 0
    Pour k allant de 0 à N − 1 Faire
      | U prend la valeur 3U − 2k + 3
    FinPour
Sortie :
    Afficher U
```

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$? Il est conseillé de détailler la réponse.
Partie B
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n + 1$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.
5. Soit p un entier naturel non nul.
   (a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
   (b) Justifier que le plus petit n_0 vérifie $n_0 \leqslant 3p$.

Exercice 3 (1 point)
Soit A et B deux événements. On donne $\mathbb{P}(B) = 0{,}7$ et $\mathbb{P}_B\left(\overline{A}\right) = 0{,}3$. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.