Devoir surveillé n°1 – mathématiques
Correction

Exercice 1
Voir le cours.

Exercice 2
Partie A
On exécute l'algorithme :
$N = 3$
$U = 0$
$k = 0$, $U = 3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = 3$
$k = 1$, $U = 3 \times 3 - 2 \times 1 + 3 = 10$
$k = 2 = N - 1$, $U = 3 \times 10 - 2 \times 2 + 3 = 29$
L'affichage en sortie lorsque $N = 3$ est donc 29.
Partie B

1. $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3$ et $u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 + 3 = 10$.

2. (a) Soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant n$ ».

   Initialisation : Soit $n = 0$. On a $\mathcal{P}(0)$: $u_0 \geqslant 0$.
   Or $u_0 = 0$ donc $u_0 \geqslant 0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Étape de récurrence : On suppose que pour un certain entier $n \geqslant 0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   On doit démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, soit que $u_{n+1} \geqslant n + 1$.
   Or :

   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - 2n + 3 && \text{Par définition} \\ &\geqslant 3n - 2n + 3 && \text{Par hypothèse de récurrence} \\ &\geqslant n + 3 \\ &\geqslant n + 1 \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : Puisque $\mathcal{P}(0)$ est vraie et que $\mathcal{P}$ est héréditaire, alors d'après le principe de récurrence on peut affirmer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, autrement dit que $u_n \geqslant n$.

   (b) On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ alors d'après la question précédente,
   $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ par comparaison.

3. On exprime : $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3$.

   Or $u_n \geqslant n$ d'après la question 2, donc $u_n - n \geqslant 0$.

   Par suite, $2(u_n - n) + 3 \geqslant 3 \geqslant 0$.

   On en déduit que la suite u est croissante.

4. (a) On exprime :

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}-(n+1)+1}{u_n-n+1}\\ &= \frac{3u_n-2n+3-n-1+1}{u_n-n+1}\\ &= \frac{3u_n-3n+3}{u_n-n+1}\\ &= \frac{3(u_n-3+1)}{u_n-n+1}\\ &= 3\end{aligned}$$

Le résultat étant constant, on en déduit que v est géométrique de raison $q=3$.

(b) Calculons : $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$.
On déduit de la question précédente que $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 3^n = 3^n$.
Or $v_n = u_n - n + 1$, donc $u_n = v_n + n - 1 = 3^n + n - 1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.

(a) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on sait que quelque soit $A > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A$. Donc en particulier pour $A = 10^p$, il existe bien un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.

(b) u étant croissante, il suffit de vérifier que pour $n = 3p$, $u_n \geqslant 10^p$.
Or $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = (3^3)^p + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1$.
Comme $p > 0$, alors $3p - 1 > 0$. De plus, $27^p > 10^p$. Donc on a bien $u_{3p} \geqslant 10^p$.
Comme u est croissante, alors quelque soit $n \geqslant 3p$, $u_n \geqslant 10^p$.
Ainsi, n_0 étant le plus petit possible, $n_0 \leqslant 3p$.

Exercice 3
On utilise les formules du cours :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}_B(A)\\ &= \mathbb{P}(B)\times\left(1-\mathbb{P}_B\left(\overline{A}\right)\right)\\ &= 0{,}7\times(1-0{,}3)\\ &= 0{,}7\times 0{,}7\\ &= 0{,}49\end{aligned}$$