Devoir surveillé n°2 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. L'énoncé nous donne : $\mathbb{P}(\overline{H}) = 0{,}8$, $\mathbb{P}_H(D) = 0{,}03$ et $\mathbb{P}(D) = 0{,}07$.

2. (a) On a également $\mathbb{P}_{\overline{H}}(D) = p$ et $\mathbb{P}(H) = 0{,}2$. On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(H \cap D) + \mathbb{P}(\overline{H} \cap D)\\ &= \mathbb{P}(H) \times \mathbb{P}_H(D) + \mathbb{P}(\overline{H}) \times \mathbb{P}_{\overline{H}}(D)\\ &= 0{,}2 \times 0{,}03 + 0{,}8 \times p\\ &= 0{,}006 + 0{,}8p\end{aligned}$$

   (b) On sait que $\mathbb{P}(D) = 0{,}07$ et $\mathbb{P}(D) = 0{,}006 + 0{,}8p$, donc $0{,}006 + 0{,}8p = 0{,}07$.
   Par suite, on résout l'équation et on obtient : $p = \dfrac{0{,}07 - 0{,}006}{0{,}8} = \dfrac{0{,}064}{0{,}8} = 0{,}08$.

3. On doit calculer : $\mathbb{P}_D(H) = \dfrac{\mathbb{P}(H \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \dfrac{0{,}024}{0{,}07} = \dfrac{24}{70} = \dfrac{12}{35}$.

4. (a) l'événement $B \cap \overline{H}$ est : « le cadenas est bleu et premier prix ».
   (b) On calcule :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \cap \overline{H}) &= \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(\overline{H}) \qquad \text{car } B \text{ et } H \text{ sont indépendants, donc } B \text{ et } \overline{H} \text{ aussi}\\ &= 0{,}4 \times 0{,}8\\ &= 0{,}32\end{aligned}$$

Exercice 2

1. On exprime :

$$\begin{aligned}f(-1) &= \left((-1)^2 - 3 \times (-1) + 1\right) \mathrm{e}^{-1} - 1 = (1 + 3 + 1)\,\mathrm{e}^{-1} - 1 = 5\,\mathrm{e}^{-1} - 1\\ &= 5 \times \frac{1}{e^1} - 1 = \frac{5}{\mathrm{e}} - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \frac{5 - \mathrm{e}}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

2. f est de la forme $uv - 1$ avec $u(x) = (x^2 - 3x + 1)$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
   Alors $u'(x) = 2x - 3$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.
   Or $(uv)' = u'v + uv'$ donc $f'(x) = (2x - 3)\,\mathrm{e}^x + (x^2 - 3x + 1)\,\mathrm{e}^x - 0 = \mathrm{e}^x(x^2 - x - 2)$.

3. Puisque $\mathrm{e}^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - x - 2$.
   On calcule alors $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0$.
   Il y a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 - 3}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 + 3}{2} = 2$.
   Or $a = 1 > 0$, donc on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		$\nearrow$	$\dfrac{5-e}{e}$	$\searrow$	$-\mathrm{e}^2-1$	$\nearrow$	

4. (a) La fonction f est dérivable, donc continue sur $[-3;-2]$.
   D'autre part, d'après les variations, sur cet intervalle elle est strictement croissante.
   Enfin, $f(-3) \simeq -0{,}054$ et $f(-2) \simeq 0{,}49$, donc $f(-3) \leqslant 0 \leqslant f(-2)$
   Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-3;-2]$.

   (b) On a (grâce à la calculatrice) : $-2{,}894 \leqslant \alpha \leqslant -2{,}893$.

   (c) La troisième solution de l'équation $f(x) = 0$ est $x = 0$.
   En effet, $f(0) = ((0)^2 - 3 \times (0) + 1)\,\mathrm{e}^0 - 1 = 1 \times 1 - 1 = 0$.

5. Le tableau de signes de la fonction f est alors le suivant :

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

6. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donnée par la formule :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

Or $f'(0) = \mathrm{e}^0(0^2 - 0 - 2) = 1 \times (-2) = -2$, et on sait déjà que $f(0) = 0$.

Ainsi l'équation demandée est $y = -2x$.