LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2016–2017

Devoir surveillé n°3 – mathématiques

29/11/2016

Exercice 1 (6 points)

Pour chacune des affirmations données ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse dans tous les cas. Toute réponse non justifiée à cet exercice ne rapporte aucun point.

1. Pour tout $z \neq 2$ on définit $Z = \dfrac{iz}{z-2}$.

   Affirmation 1 : « Z est imaginaire pur si et seulement si z est réel. »

2. Soit v une suite définie sur $\mathbb{N}$. On définit la suite w pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = 1 - \mathrm{e}^{v_n}$.

   (a) **Affirmation 2 :** « La suite w est majorée. »

   (b) **Affirmation 3 :** « Si la suite v est majorée, alors la suite w est minorée. »

Exercice 2 (7 points)

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}i \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2i$ d'image le point A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}i \times u_n$.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n :

   $$u_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4 - 2i).$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Exercice 3 (7 points)

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

1. (a) Calculer la fonction f', dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

   (b) Établir le tableau de variations de la fonction f.
   Détailler le calcul de la valeur simplifiée d'une image donnée dans le tableau.

2. Justifier que $f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$ (lorsque $x \neq 0$).