Devoir surveillé n°3 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On sait que Z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{Z} = -Z$. Or :

$$\begin{aligned}\overline{Z} = -Z &\Leftrightarrow \frac{-i\overline{z}}{\overline{z}-2} = \frac{-iz}{z-2}\\ &\Leftrightarrow -i\overline{z}(z-2) = -iz(\overline{z}-2)\\ &\Leftrightarrow -iz\overline{z} + 2i\overline{z} = -iz\overline{z} + 2iz\\ &\Leftrightarrow 2i\overline{z} = 2iz\\ &\Leftrightarrow \overline{z} = z\end{aligned}$$

Autrement dit, Z est imaginaire pur si et seulement si z est réel. L'affirmation 1 est donc vraie.

2. (a) Comme une exponentielle est toujours positive, on sait que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{v_n} > 0$.
Alors $-\mathrm{e}^{v_n} < 0$, puis $1 - \mathrm{e}^{v_n} < 1$. Autrement dit w est majorée par 1.
L'affirmation 2 est donc vraie.

   (b) Si v est majorée, alors il existe un réel M tel que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant M$.
Alors, comme exp est croissante, $\mathrm{e}^{v_n} \leqslant \mathrm{e}^M$, donc $-\mathrm{e}^{v_n} \geqslant -\mathrm{e}^M$ puis $w_n = 1-\mathrm{e}^{v_n} \geqslant 1-\mathrm{e}^M$.
Autrement dit w est minorée : l'affirmation 2 est vraie.

Exercice 2

1. (a) On exprime :

$$\begin{aligned}u_{n+1} = z_{n+1} - z_A &= \frac{1}{2}i \times z_n + 5 - (4+2i) = \frac{1}{2}i \times z_n + 1 - 2i = \frac{1}{2}i\left(z_n + \frac{1-2i}{\frac{1}{2}i}\right)\\ &= \frac{1}{2}i\left(z_n + \frac{2-4i}{i}\right) = \frac{1}{2}i\left(z_n + \frac{(2-4i)(-i)}{1}\right) = \frac{1}{2}i\left(z_n + (-4-2i)\right) = \frac{1}{2}i\left(z_n - z_A\right)\\ &= \frac{1}{2}i \times u_n\end{aligned}$$

   (b) D'après la question précédente, u est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}i$.
Or $u_0 = z_0 - z_A = 0 - (4+2i) = -4-2i$. Alors pour tout entier naturel n :

$$u_n = q^n \times u_0 = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (-4-2i).$$

2. Les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AM_n}$ et $\overrightarrow{AM_{n+4}}$ sont colinéaires.
On a $z_{\overrightarrow{AM_{n+4}}} = z_{n+4} - z_A = u_{n+4}$ et $z_{\overrightarrow{AM_n}} = z_n - z_A = u_n$.
Or

$$u_{n+4} = \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+4}(-4-2i) = \left(\frac{1}{2}i\right)^4\left(\frac{1}{2}i\right)^n(-4-2i) = \frac{1}{16}u_n$$

On en déduit que $\overrightarrow{AM_{n+4}} = \dfrac{1}{16}\overrightarrow{AM_n}$, donc que les deux vecteurs sont colinéaires puis que les points sont alignés.

Exercice 3

1. (a) f est de la forme uv avec $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$, et $v(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$.
   v est de la forme e^w avec $w(x) = 1 - x^2$.
   $w'(x) = -2x$ et $(\mathrm{e}^w)' = w'\,\mathrm{e}^w$, donc $v'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{1-x^2}$.
   Par suite, $f' = (uv)' = u'v + uv'$, donc $f'(x) = \mathrm{e}^{1-x^2} + x \times (-2x)\,\mathrm{e}^{1-x^2} = (1 - 2x^2)\,\mathrm{e}^{1-x^2}$.

   (b) Comme une exponentielle est toujours positive, $f'(x)$ est du signe de $1 - 2x^2$.
   Cette expression est polynomiale de degré 2, avec $a = -2 < 0$.
   Or $1 - 2x^2 = (1 - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x)$ a pour racines $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$.
   On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$1 - 2x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	$\searrow$		$-\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}}{2}}$	$\nearrow$	$\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}}{2}}$	$\searrow$	

   Calcul d'une des images :
   $$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mathrm{e}} = -\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}.$$

2. On a : $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x^2} = x\,\mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e} \times x \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x^2}} = \mathrm{e} \times \dfrac{1}{x} \times x \times x \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x^2}} = \dfrac{\mathrm{e}}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.
   (on peut diviser par x lorsque $x \neq 0$).