

Devoir surveillé n°4 – mathématiques  
20/01/2017

**Exercice 1 (7 points)**

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = x e^{-x} - 0,1$

- Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement cette limite.
- Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  et dresser le tableau de variations.
- Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution notée  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

**Exercice 2 (6 points)**

Une entreprise produit des bactéries pour l'industrie. Dans une cuve, la masse de bactérie ne dépasse jamais 50 kg. La masse de bactéries en fonction du temps est modélisée par la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49 e^{-0,2t}}$$

Où  $t$  représente le temps exprimé en jours, et  $f(t)$  représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps  $t$ .

- Calculer  $f(0)$ . Interpréter cette valeur par rapport au contexte.
- Démontrer que pour tout réel  $t \geq 0$ ,  $f(t) < 50$ .
- Étudier le sens de variation de la fonction  $f$ .
- Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

**Exercice 3 (7 points)**

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la fonction  $f_n$  pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  par :

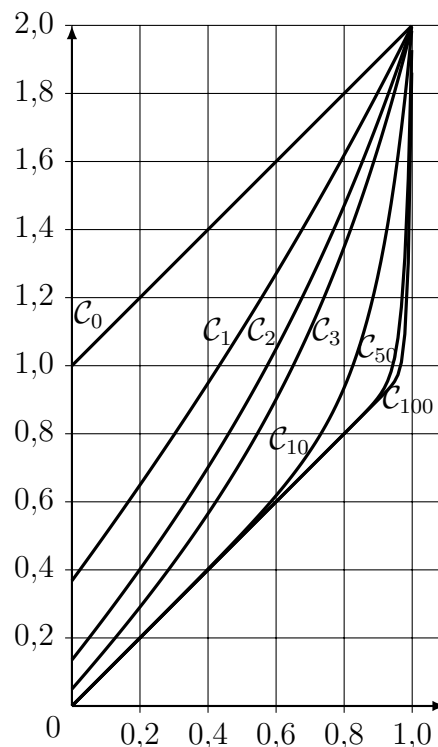
$$f_n(x) = x + e^{n(x-1)}$$

On note  $\mathcal{C}_n$  la représentation graphique de la fonction  $f_n$  dans un repère orthogonal.

Quelques-unes des courbes  $\mathcal{C}_n$  sont représentées ci-contre.

**Partie A : Généralités sur les fonctions  $f_n$ .**

- Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $f_n$  est croissante et positive sur l'intervalle  $[0; 1]$ .
- Montrer que les courbes  $\mathcal{C}_n$  ont toutes un point commun  $A$ , et préciser ses coordonnées.
- À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en  $A$  aux courbes  $\mathcal{C}_n$  pour les grandes valeurs de  $n$ ? Démontrer cette conjecture.



**Partie B : Évolution de  $f_n(x)$  lorsque  $x$  est fixé.**

Soit  $x$  un réel fixé de l'intervalle  $[0; 1]$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = f_n(x)$ .

- Dans cette question, on suppose que  $x = 1$ . Étudier la limite éventuelle de la suite  $(u_n)$ .
- Dans cette question, on suppose que  $0 \leq x < 1$ . Étudier la limite éventuelle de la suite  $(u_n)$ .