Devoir surveillé n°4 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On réécrit : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - 0{,}1$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -0{,}1$.

   On en déduit que la droite d'équation $y = -0{,}1$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2. On calcule la dérivée de f. On a $f = uv - 0{,}1$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

   Alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ puis $f' = u'v + uv' + 0$,

   donc $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

   Une exponentielle étant toujours positive, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$.

   Or $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$-0{,}1$	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{-1} - 0{,}1$	$\searrow$	$-0{,}1$

3. La fonction f est continue sur $[0;1]$ car dérivable sur cet intervalle.

   De plus, f est strictement croissante sur $[0;1]$ d'après la question précédente.

   Enfin, $f(0) = -0{,}1 < 0$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1} - 0{,}1 > 0$.

   Alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède bien une unique solution α sur l'intervalle $[0;1]$.

Exercice 2

1. $f(0) = \dfrac{50}{1 + 49 \times 1} = 1$.

   Cela signifie qu'au tout début, la masse de bactérie est de 1 kg.

2. Comme, quelque soit $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 0$, on en déduit que $1 + 49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 1$, puis comme la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$, $\dfrac{1}{1 + 49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}} < 1$ puis $f(t) < 50$.

3. f est de la forme $50 \times \dfrac{1}{u}$ avec $u(t) = 1 + 49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$, alors $u'(t) = 49 \times (-0{,}2)\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = -9{,}8e^{-0{,}2t}$.

   Par suite, $f' = 50 \times \left(\dfrac{-u'}{u^2}\right)$, donc $f'(t) = 50 \times \dfrac{-\left(-9{,}8\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)}{\left(1 + 49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)^2} = \dfrac{490\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}}{\left(1 + 49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)^2}$.

   Or une exponentielle et un carré sont toujours positifs, donc $f'(t)$ est du signe de 490, autrement dit est positive.

   conclusion : f est croissante.

4. On a $\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}2t = -\infty$. Or $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 1 + 49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 1 + 49 \times 0 = 1$, puis $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \dfrac{50}{1} = 50$.

Exercice 3
Partie A :

1. On calcule : ${f_n}'(x) = 1 + n\,\mathrm{e}^{n(x-1)}$.

   Or une exponentielle est strictement positive et n est un entier naturel, donc ${f_n}'(x) \geqslant 1 > 0$, et f_n est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$.

   Du fait que f_n soit croissante et que $f_n(0) = \mathrm{e}^{-n} > 0$, f_n est bien positive sur $[0;1]$.

2. On vérifie que pour tout entier naturel n, $f_n(1) = 1$.

   Ainsi toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point $A(0;1)$.

3. Lorsque n augmente, les courbes semblent devenir de plus en plus verticales en s'approchant du point A. On peut donc faire la conjecture que les coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathcal{C}_n$ tendent vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, autrement dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} {f_n}'(1) = +\infty$.

   Or ${f_n}'(1) = 1 + n\,\mathrm{e}^{n(1-1)} = 1 + n\,\mathrm{e}^{0} = 1 + n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + n = +\infty$, ce qui démontre la conjecture.

Partie B :

1. Comme $x = 1$, on a $u_n = f_n(1) = 1$. La suite est donc constante, égale à 1 et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2. Comme $0 \leqslant x < 1$, alors $x - 1 < 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x-1) = -\infty$.

   Or on sait que $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n(x-1)} = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x + 0 = x$.