ÉPREUVE DE BAC BLANC
Mercredi 01 mars 2017

MATHÉMATIQUES

Série S
OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

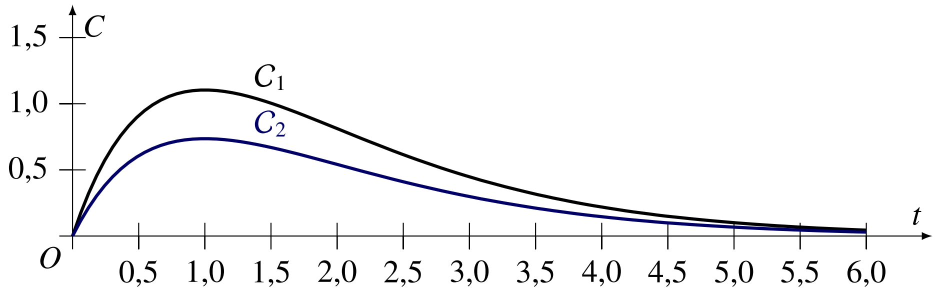
Coefficient 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Exercice 1 (Polynésie, 10 juin 2016 – 7 points)
Partie A
Voici deux courbes C_1 et C_2 qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.
C est exprimée en gramme par litre et t en heure.
Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.
   À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?
   On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.
2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.
3. Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par
   $$f(t) = At\mathrm{e}^{-t}$$
   où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.
   (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.
   (b) L'affirmation suivante est-elle vraie ?
   « À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B - Un cas particulier
Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par
$$f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.
3. Rappeler la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de 0,2 g.L^{-1} pour un jeune conducteur.
   (a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0{,}2$.
   (b) Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?
   Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à 5×10^{-3} g.L^{-1}.
   (a) Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.
   (b) On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur 3,5 p prend la valeur 0,25 C prend la valeur 0,21

Traitement :	Tant que $C > 5 \times 10^{-3}$ faire :
	    t prend la valeur $t + p$
	    C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher t

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme.
Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

Exercice 2 (Métropole-La Réunion, 20 juin 2016 – 5 points)
Partie A
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;\,1]$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln\left(N^2 + 1\right) < A$ N prend la valeur $N + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

   (a) Que fait cet algorithme ?
   (b) Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;\,1]$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
   En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 3 (Métropole-La Réunion, 12 septembre 2016 – 4 points)
On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geqslant 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

1. (a) Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   (b) Dans cette question, on suppose que $z_0 = \text{i}$.
   Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   (c) Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné.
   Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n ?
   Prouver cette conjecture.
2. Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1 + \text{i}$.
3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

Exercice 4 (4 points)
Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.
Partie A (Asie, 23 juin 2016)
Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B ; 55% des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45% dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 ; dans la serre B, elle est égale à 0,84.
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Proposition 1 : La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.
Proposition 2 : On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit. La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.
Partie B (Amérique du Sud, 22 novembre 2016)
La durée de fonctionnement (en mois) d'un module électronique peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la valeur exacte de λ, sachant que le service statistique indique que
   $\mathbb{P}(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0{,}03$.
   Pour la suite de l'exercice on prendre $\lambda = 0{,}00127$.
2. Déteminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois.
3. (a) Démontrer que, pour tous réels t et h positifs, on a : $\mathbb{P}_{T\geqslant t}(T \geqslant t + h) = \mathbb{P}(T \geqslant h)$, c'est à dire que la variable aléatoire T est sans vieillissement.
   (b) Le module électronique fonctionne depuis 36 mois. Déterminer la probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants.