LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2016–2017

Épreuve de bac blanc – mathématiques

Correction

Exercice 1

Partie A

1. La vitesse est visiblement maximale pour $t = 0$ car c'est la tangente aux courbes en $O(0\ ;\ 0)$ qui semble avoir le coefficient directeur le plus élevé parmi toutes les tangentes.
2. Le coefficient directeur de la tangente en O à la courbe $\mathcal{C}_1$ est supérieur à celui de la tangente en O à la courbe $\mathcal{C}_2$. C'est donc la personne P_1 la moins corpulente qui subit plus vite les effets de l'alcool.
3. (a) f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$. $f = uv \Longrightarrow f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(t) = At \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = A \\ v'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

   Quelque soit $t \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = A(1-t)\,\mathrm{e}^{-t}$ et $f'(0) = A$.

   (b) L'affirmation est FAUSSE

   - On a vu que le nombre dérivé en 0 est égal à $f'(0) = A$: c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe à l'origine et on sait que les personnes de faible corpulence subissent plus vite les effets de l'alcool. Donc plus A est grand et plus la personne est de faible corpulence.
   - Autre méthode mathématique : si $A_1 > A_2$ alors $A_1 t\,\mathrm{e}^{-t} > A_2 t\,\mathrm{e}^{-t}$ car $t\,\mathrm{e}^{-t} > 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$

     On en déduit que la courbe associée à A_1 est au dessus de celle associée à A_2 donc la personne associée à A_1 est de plus faible corpulence que la personne associée à A_2.

Partie B

1. On a vu dans la partie précédente que $\forall t \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = A(1-t)\,\mathrm{e}^{-t}$ or $A\,\mathrm{e}^{-t} > 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $1-t$ et $1-t > 0 \iff t < 1$, on peut donc déterminer les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{2}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

2. La concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale 1h après l'absorption.

   Elle est alors d'environ 0,74 $g.l^{-1}$.
3. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$. Alors :

   $$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} 2 \times \frac{t}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to+\infty} 2 \times \frac{1}{\left(\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}\right)} = 0 \text{ par quotient.}$$

   On en déduit que l'alcool finit par s'éliminer totalement.
4. (a) f est continue et strictement croissante sur $[0\ ,\ 1]$ à valeurs dans $\left[0\ ;\ \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$.

   Or $0{,}2 \in \left[0\ ;\ \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 0{,}2$ admet une unique solution t_1 sur $[0\ ,\ 1]$.

de même, f est continue et strictement décroissante sur $[1\ ,\ +\infty[$ à valeurs dans $\left]0\ ;\ \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$.

Or $0{,}2 \in \left]0\ ;\ \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(t) = 0{,}2$ admet une unique solution t_2 sur $[1\ ,\ +\infty[$.

(b) Par balayage, on obtient $t_1 \simeq 0{,}112$ et $t_2 \simeq 3{,}577$

donc Paul doit attendre au minimum 3 heures et 35 minutes avant de reprendre le volant.

5. (a) On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ donc par définition de la limite, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > T$, $f(t) \in]-\epsilon\ ;\ \epsilon[$

ici on pose $\epsilon = 5 \times 10^{-3}$.

Donc il existe un instant T à partir duquel l'alcool n'est plus détectable dans le sang.

(b)

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25	0,25	0,25
t	3,5	3,75	4
C	0,21	0,18	0,15

La valeur affichée par l'algorithme est le temps nécessaire, en heure, pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang.

Si on poursuit l'algorithme jusqu'à son terme, on obtient 8,25 à l'affichage donc il faut 8 h et 15 minutes pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang

Exercice 2

Partie A

1. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} & f(x) & = & x \\ \iff & x - \ln(x^2+1) & = & x \\ \iff & \ln(x^2+1) & = & 0 \\ \iff & x^2+1 & = & \mathrm{e}^0 \\ \iff & x^2 & = & 0 \\ \iff & x & = & 0 \end{array}$$

L'équation $f(x) = x$ admet 0 pour unique solution

2. • Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

La fonction $u : x \mapsto x^2 + 1$ est une fonction trinôme, donc dérivable là où elle est définie, i.e $\mathbb{R}$.

Puisque $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $\ln \circ u = \ln u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Finalement, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\ln(x^2+1)$, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x, on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, *sauf pour* $x = 1$: on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Montrons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$:

De $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ on déduit, par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$.

Il vient ensuite, par produit :

$$\lim_{x \to -\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty$$

De $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty$ on déduit, par somme :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

3. La fonction f est (strictement) croissante sur $[0\ ;\ 1]$. Par suite, quelque soit $x \in [0;1]$:

$$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$$

On a $f(0) = 0 - \ln(0^2+1) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln(1^2+1) = 1 - \ln 2$. Puisque $1 - \ln 2 < 1$, alors

$$0 \leqslant f(x) < 1$$

On a prouvé que quelque soit $x \in [0;1]$:

$$f(x) \in [0{,}1]$$

4. (a) L'algorithme affiche la plus petite valeur de N pour laquelle $N - \ln(N^2+1)$ est supérieur ou égal à A.

(b)

Pour $A = 100$, l'algorithme affiche 110

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \in [0{,}1]$.
   - Puisque $u_0 = 1$, $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - Supposons vraie la propriété $\mathcal{P}_n$ pour *un* entier naturel n.
     On a alors : $u_n \in [0{,}1]$.
     D'après la troisième question de la partie A, on en déduit :

     $$f(u_n) \in [0{,}1]$$

     soit :

     $$u_{n+1} \in [0{,}1]$$

     On a prouvé :

     $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n \text{ est vraie} \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie}$$

   - On a prouvé par récurrence :

     $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in [0{,}1]$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2 + 1\right)$.
   Étudions le signe de $-\ln\left(u_n^2+1\right)$:
   Puisque $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on en déduit, la fonction carré étant croissante sur $[0{,}1]$:

   $$0^2 \leqslant u_n^2 \leqslant 1^2$$

   soit :

   $$u_n^2 \in [0{,}1]$$

   Par suite :

   $$u_n^2 + 1 \in [1{,}2]$$

   La fonction ln est croissante sur $[1, +\infty[$:
   De $u_n^2 + 1 \geqslant 1$, on déduit $\ln(u_n^2+1) \geqslant \ln 1$, soit $\ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant 0$.
   Puisque $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2+1) \leqslant 0$, alors

   La suite u est décroissante

3. La suite u est décroissante et minorée par 0 : elle converge donc, en vertu du théorème de la limite monotone, vers un nombre réel ℓ.
4. Puisque l'équation $f(x) = x$ admet 0 pour unique solution, on en déduit : $\ell = 0$.

Exercice 3

1. (a) $z_1 = 1 - \dfrac{1}{z_0} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$; $z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - 2 = -1$; $z_3 = 1 - \dfrac{1}{z_2} = 1 - \dfrac{1}{-1} = 1 + 1 = 2$;

   ensuite on retrouve $z_4 = \dfrac{1}{2}$, $z_5 = -1$ et $z_6 = 2$.

   (b) $z_1 = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$; $z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - \dfrac{1}{1+\mathrm{i}} = 1 - \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+1} = \dfrac{2-1+\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$;

   $z_3 = 1 - \dfrac{1}{z_2} = 1 - \dfrac{1}{\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}} = 1 - \dfrac{2}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{1+\mathrm{i}-2}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} =$
   $\dfrac{-1+1+\mathrm{i}+\mathrm{i}}{1+1} = \mathrm{i} = z_0$;

   ensuite on retrouve $z_4 = z_1 = 1 + \mathrm{i}$, puis $z_5 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ et $z_6 = \mathrm{i}$.

   (c) Des résultats de la question précédente, on peut conjecturer que $z_{3n} = z_0$, pour $n \in \mathbb{N}$.
   On démontre cette conjecture par récurrence sur n :

   Initialisation : on a bien $z_{3\times 0} = z_0$.

   Hérédité : Supposons que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $z_{3p} = z_0$, alors

   $$z_{3(p+1)} = z_{3p+3} = 1 - \frac{1}{z_{3p+2}} = 1 - \frac{1}{1 - \dfrac{1}{z_{3p+1}}} = 1 - \frac{z_{3p+1}}{z_{3p+1} - 1} = \frac{z_{3p+1} - 1 - z_{3p+1}}{z_{3p+1} - 1}$$

   $$= \frac{-1}{z_{3p+1} - 1} = \frac{-1}{1 - \dfrac{1}{z_{3p}} - 1} = \frac{-1}{-\dfrac{1}{z_{3p}}} = z_{3p} = z_0.$$

   Conclusion : On a donc démontré que $z_{3\times 0} = z_0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $z_{3p} = z_0$, alors $z_{3(p+1)} = z_0$: d'après le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $z_{3n} = z_0$.

2. Comme $2016 = 3 \times 672$, on a d'après la question précédente $z_{2016} = z_0 = 1 + \mathrm{i}$.
3. On a $z_0 = z_1 \iff z_0 = 1 - \dfrac{1}{z_0}$ (avec $z_0 \neq 0$) ou encore

   $z_0^2 = z_0 - 1 \iff z_0^2 - z_0 + 1 = 0 \iff \left(z_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0 \iff \left(z_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \iff$
   $\left(z_0 - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z_0 - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \iff \begin{cases} z_0 - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ z_0 - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z_0 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_0 = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

   Il y a donc deux valeurs de z_0 pour lesquelles $z_1 = z_0$.

   Dans ces deux cas, $z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - \dfrac{1}{z_0} = z_1$, et ainsi de suite, donc les suites (z_n) sont constantes.

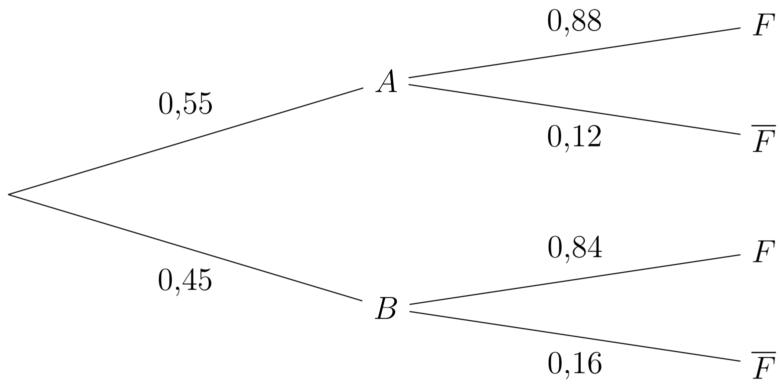
Exercice 4

Partie A

On appelle :

- A l'événement « la fleur de fraisier vient de la serre A »
- B l'événement « la fleur de fraisier vient de la serre B »
- F l'événement « la fleur de fraisier donne une fraise »
- $\overline{F}$ l'événement contraire de F.

On peut traduire l'énoncé sous forme de l'arbre pondéré ci-dessous :



Proposition 1 :
D'après les notations, on cherche la probabilité de l'événement F.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) = P(A) \times P_A(F) + P(B) \times P_B(F) = 0{,}55 \times 0{,}88 + 0{,}45 \times 0{,}84 = 0{,}862$.
Ainsi la proposition 1 est vraie.
Proposition 2 :
On cherche la probabilité que la fleur provienne de la serre A sachant qu'elle a donné une fraise :
$P_F(A) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0{,}55 \times 0{,}88}{0{,}862} \simeq 0{,}561 \neq 0{,}439$.
Ainsi la proposition 2 est fausse.
Partie B

1. Le service statistique indique que $\mathbb{P}(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0{,}03$ donc λ vérifie l'égalité $1 - \mathrm{e}^{-24\lambda} = 0{,}03$.
   On résout cette équation d'inconnue λ :
   $$\begin{aligned} 1 - \mathrm{e}^{-24\lambda} = 0{,}03 &\iff 0{,}97 = \mathrm{e}^{-24\lambda} \\ &\iff \ln(0{,}97) = -24\lambda \\ &\iff -\frac{\ln(0{,}97)}{24} = \lambda \end{aligned}$$
   La valeur de λ telle que $P(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0{,}03$ est $\lambda = -\dfrac{\ln(0{,}97)}{24}$.
2. $\mathbb{P}(24 \leqslant T \leqslant 48) = \mathrm{e}^{-24\lambda} - \mathrm{e}^{-48\lambda} \simeq 0{,}0291$.
   La valeur approchée à 10^{-4} de la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois est 0,0291.
3. (a) On a $\mathbb{P}(T \geqslant b) = \mathrm{e}^{-b\lambda}$ et $(T \geqslant t+h) \cap (T \geqslant t) = (T \geqslant t+h)$ (car $h > 0$). Donc :
   $$\begin{aligned} P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+h) &= \frac{P\left((T \geqslant t+h) \cap (T \geqslant t)\right)}{P(T \geqslant t)} = \frac{P(T \geqslant t+h)}{P(T \geqslant t)} = \frac{\mathrm{e}^{-(t+h)\lambda}}{\mathrm{e}^{-t\lambda}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-t\lambda} \times \mathrm{e}^{-h\lambda}}{\mathrm{e}^{-t\lambda}} \\ &= \mathrm{e}^{-h\lambda} \\ &= P(T \geqslant h) \end{aligned}$$
   Donc la variable aléatoire T est sans vieillissement.

   (b) Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. La probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants est $\mathbb{P}_{T \geqslant 36}(T \geqslant 36 + 12)$ qui est égal à $\mathbb{P}(T \geqslant 12)$ d'après la question précédente.
   $\mathbb{P}(T \geqslant 12) = \mathrm{e}^{-12\lambda} \simeq 0{,}9849$.
   La valeur approchée à 10^{-4} de la probabilité que le module électronique fonctionne encore 12 mois, sachant qu'il a déjà fonctionné 36 mois, est égale à 0,9849.