

ÉPREUVE DE TYPE BAC

Mercredi 05 avril 2017

MATHÉMATIQUES

Série S
OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Exercice 1 (Asie, 16 juin 2015 – 6 points)

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

- (a) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

- (b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
- Déterminer le module et un argument du nombre complexe j , puis donner sa forme exponentielle.
- Démontrer les égalités suivantes :
 - $j^3 = 1$;
 - $j^2 = -1 - j$.
- On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.

On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

- En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.
- En déduire que $AC = BC$.
- Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.
- En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

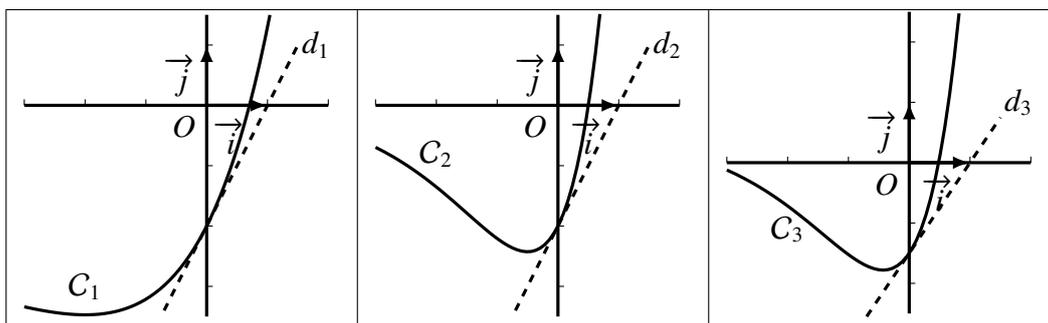
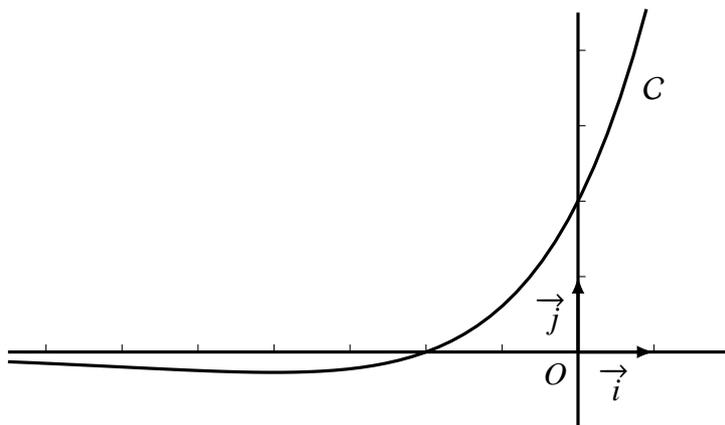
Exercice 2 (Métropole, 12 septembre 2013 – 6 points)

Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe C et trois autres courbes C_1, C_2, C_3 avec la tangente en leur point d'abscisse 0.



1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .
2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .
 - (a) À l'aide de la courbe C , déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
 - (b) L'une des courbes C_1, C_2, C_3 est la courbe représentative de la fonction F . Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur \mathbb{R} par

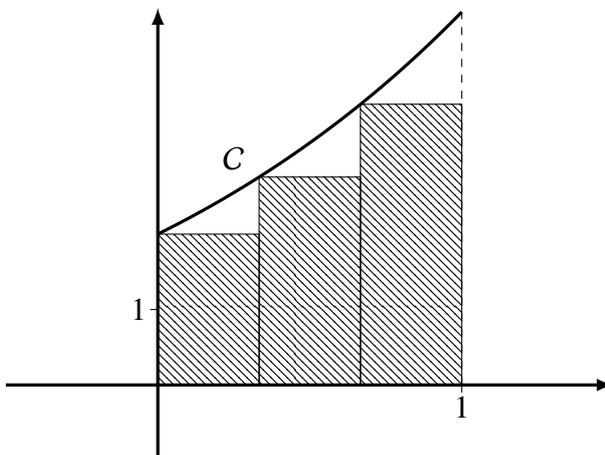
$$f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{2}x}.$$

1. L'observation de la courbe C permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.
 - (a) Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{2}(x + 4)e^{\frac{1}{2}x}$.
 - (b) En déduire une validation de la conjecture précédente.
2. On pose $I = \int_0^1 f(x) dx$.
 - (a) Interpréter géométriquement le réel I .
 - (b) Soient u et v les fonctions définies sur \mathbb{R} par $u(x) = x$ et $v(x) = e^{\frac{1}{2}x}$. Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$.
 - (c) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I .
3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n .
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n - 1$ Affecter à s la valeur $s + \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$. Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s .

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n .

- (a) Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



- (b) Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

Exercice 3 (Centres étrangers, 12 juin 2014 – 3 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.

Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fautive ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1

Dans un hypermarché, 75 % des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.

Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage. La probabilité que cette personne soit une femme a pour valeur arrondie au millième :

- a. 0,750 b. 0,150 c. 0,462 d. 0,700

Question 2

Dans cet hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à 0,3. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle.

La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millième :

- a. 0,900 b. 0,092 c. 0,002 d. 0,267

Question 3

Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda = \frac{1}{8}$.

La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

- a. 0,750 b. 0,250 c. 0,472 d. 0,528

Exercice 4 (Nouvelle Calédonie, 17 novembre 2016 – 5 points)

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles. Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente. Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers. On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude. Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n -ième année. Ainsi, on a :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 0,8u_n + c.$$

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n) .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.
3. Vérifier les deux conjectures établies à la question 1. en justifiant votre réponse.

Interpréter ces deux résultats.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.

On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.

On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 5c$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n .
3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.