Épreuve de type bac – mathématiques
Correction

Exercice 1

Partie A : propriétés du nombre j

1. (a) On résout l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$.
   $\Delta = \cdots = -3 < 0$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$
   (b) $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = z_1$ donc j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
2. $|\mathrm{j}|^2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$ donc $|\mathrm{j}| = 1$
   $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; on cherche θ tel que $\begin{cases} \cos\theta &= -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ Donc $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$
   La forme exponentielle de j est donc : $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.
3. (a) $\mathrm{j}^3 = \left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi\times 3}{3}} = \mathrm{e}^{i\times 2\pi} = 1$
   (b) j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ donc $\mathrm{j}^2 + \mathrm{j} + 1 = 0$ et donc $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.
4. P a pour affixe 1 ; Q a pour affixe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$
   et R pour affixe $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j} = -1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.
   Alors :
   $$PQ^2 = \left|-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - 1\right|^2 = \left|-\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \Longrightarrow PQ = \sqrt{3},$$
   $$QR^2 = \left|-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right| 2 = \left|-\sqrt{3}\right|^2 = 3 \Longrightarrow QR = \sqrt{3},$$
   $$RP^2 = \left|1 + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \left|\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \Longrightarrow RP = \sqrt{3}$$
   $PQ = QR = RP$ donc le triangle PQR est équilatéral.

Partie B

1. On sait que $a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0$ donc $a = -\mathrm{j}b - \mathrm{j}^2c$.
   Or, d'après la question **A. 3. b.**, $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$, donc :
   $a = -\mathrm{j}b - \mathrm{j}^2c = -\mathrm{j}b - (-1 - \mathrm{j})c = -\mathrm{j}b + c + \mathrm{j}c \iff a - c = \mathrm{j}(c - b)$
2. $a - c = \mathrm{j}(c - b) \Longrightarrow |a - c| = |\mathrm{j}(c - b)| \Leftrightarrow |a - c| = |\mathrm{j}| \times |c - b|$
   On a vu précédemment que $|\mathrm{j}| = 1$; de plus $|a - c| = AC$ et $|c - b| = BC$.
   On a donc démontré que $AC = BC$.
3. On sait que $a = -\mathrm{j}b - \mathrm{j}^2c$. On sait aussi que $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$ donc $\mathrm{j} = -1 - \mathrm{j}^2$.
   On a donc $a = -(-1 - \mathrm{j}^2)b - \mathrm{j}^2c = b + \mathrm{j}^2b - \mathrm{j}^2c$ ce qui équivaut à $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$.

4. On sait que $|j| = 1$ donc $\left|j^2\right| = |j|^2 = 1$. De plus $|a-b| = AB$ et $|b-c| = CB$.
On a vu dans la question précédente que $a - b = j^2(b-c)$ ce qui entraîne $|a-b| = \left|j^2(b-c)\right|$ ou encore $|a-b| = \left|j^2\right| \times |b-c|$. Cette dernière égalité équivaut à $AB = CB$.
Comme $AC = BC$ et $AB = CB$, on a démontré que le triangle ABC était équilatéral.

Exercice 2
Partie A

1. Par lecture graphique, on voit que $f(x)$ est négative pour tout $x \in]-\infty; -2]$ et positive pour tout $x \in [-2; +\infty[$.
2. (a) On sait que F est une primitive de f donc, $F' = f$. Par suite, $F'(0) = f(0) = 2$ et $F'(-2) = f(-2) = 0$.
   (b) $\mathcal{C}_3$ ne convient pas car la tangente au point d'abscisse 0 n'a pas pour coefficient directeur 2. Elle passe par $B(0~;~-1{,}5)$ (environ) et $I(1~;~0)$ donc le coefficient directeur de cette tangente est $\frac{y_I - y_B}{x_I - x_B} = 1{,}5$, donc $\mathcal{C}_3$ ne convient pas.
   $\mathcal{C}_2$ ne convient pas car la tangente au point d'abscisse (-2) n'a pas pour coefficient directeur 0.
   La tangente horizontale semble plutôt concerner le point d'abscisse $(-0{,}5)$ de la courbe.
   $\mathcal{C}_1$ est la seule qui reste.

Partie B :

1. (a) $f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + (x+2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \times \frac{1}{2}$, donc $f'(x) = \frac{1}{2}(2 + x + 2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, donc $f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.
   (b) On sait que la fonction exp ne prend que des valeurs strictement positives, donc $f'(x)$ est du signe de $(x+4)$, et donc le sens des variations de f est donné par le tableau :

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$(-2)\,\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	

   Il y a donc bien un minimum en $x = -4$.
2. (a) si $x > -2$, $f(x) > 0$, donc sur $[0~;~1]$ f est positive, continue (car produit de fonctions continues), son intégrale sur $[0~;~1]$ est donc l'aire en unité d'aire de la surface entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (en unité d'aire).
   (b) $2(u(x)v'(x) + u(x)v'(x)) = 2\left(1 \times \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + x \times \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right) = (2+x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$
   Ainsi on voit bien que f est une dérivée : $f = (2uv)'$; donc $(2uv)$ est une primitive de f.
   (c) L'intégrale I se calcule à l'aide d'une primitive de f donc
   $I = [2u(x)v(x)]_0^1 = [2x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}]_0^1 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\mathrm{e}}$.
3. (a) Faisons un tableau des valeurs successives de k et s pendant le déroulement de l'algorithme pour $n = 3$:

k	s
0	0
0	$0 + \frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right)$
1	$\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$
2	$\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$

Le traitement est alors fini car k a atteint la valeur $(3-1)$ ce qui a été suivi de la nouvelle valeur de s, l'affichage est alors $\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$,
or chacun de ces trois termes est l'aire d'un des trois rectangles (largeur obtenue en divisant l'unité par $n=3$, leurs longueurs successives sont $f\left(\frac{0}{3}\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

(b) D'une façon générale l'affichage de l'algorithme obtenu après n boucles (de $k=0$ à $k=(n-1)$) est la somme de n termes qui sont de la forme $\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$,
donc l'affichage est :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

c'est la somme des aires des rectangles « sous la courbe » et au dessus de l'axe des abscisses entre les droites d'équations $x=0$ et $x=1$, leur largeur vaut $\dfrac{1}{n}$.

Quand n devient grand, s_n se rapproche de $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. (cours)

Exercice 3
Question 1
Avec des notations évidentes : $\mathbb{P}_B(F)=\dfrac{p(B\cap F)}{p(B)}$.
Or $\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(B\cap F)+\mathbb{P}(B\cap H)=0{,}75\times\frac{1}{5}+0{,}25\times\frac{7}{10}=0{,}15+0{,}175=0{,}325$.
D'où $\mathbb{P}_B(F)=\dfrac{0{,}15}{0{,}325}=\dfrac{150}{325}=\dfrac{6}{13}\approx 0{,}462$.
$\Rightarrow$ Réponse **c**
Question 2
On a une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}3$.
On a donc $\mathbb{P}(X=3)=\binom{10}{3}0{,}3^3\times(1-0{,}3)^{10-3}=120\times0{,}027\times0{,}823\,543\approx0{,}266\,8\approx0{,}267$.
$\Rightarrow$ Réponse **d**
Question 3
On a $\mathbb{P}(X\geqslant 6)=1-\displaystyle\int_0^6\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\,\mathrm{d}t=1-\left[-\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\right]_0^6=\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}\times6}\approx0{,}472\,3\approx0{,}472$.
$\Rightarrow$ Réponse **c**

Exercice 4
Partie A

1. On calcule, à la calculatrice, u_n pour les premières valeurs de n (valeurs de u_n arrondies) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
u_n	1	1,8	2,44	2,95	3,36	3,69	3,95	4,16	4,33	...

n	...	20	21	22	23	24	25	26	27	28
u_n	...	4,95	4,96	4,97	4,976	4,981	4,985	4,988	4,990	4,992

La suite (u_n) semble croissante et semble converger vers le nombre 5.

2. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n=5-4\times0{,}8^n$.
   - **Initialisation**
     Pour $n=0$, $u_0=1$ et $5-4\times0{,}8^0=5-4=1$. Donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
   - **Hérédité**
     Soit n un entier naturel quelconque.
     On suppose que la propriété est vraie pour le rang n c'est-à -dire $u_n=5-4\times0{,}8^n$ (c'est l'hypothèse de récurrence), et on veut démontrer qu'elle est encore vraie pour le rang $n+1$.
     $u_{n+1}=0{,}8u_n+1$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence $u_n=5-4\times0{,}8^n$; donc :
     $u_{n+1}=0{,}8\,(5-4\times0{,}8^n)+1=0{,}8\times5-4\times0{,}8^{n+1}+1=4-4\times0{,}8^{n+1}+1=5-4\times0{,}8^{n+1}$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
On a démontré que, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$.
La propriété $\mathcal{P}_n$ est donc héréditaire pour tout n.

- **Conclusion**
La propriété est vraie pour $n = 0$.
Elle est héréditaire à partir du rang 0.
Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$.

3. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(5 - 4 \times 0{,}8^{n+1}\right) - \left(5 - 4 \times 0{,}8^n\right) = 5 - 4 \times 0{,}8^{n+1} - 5 + 4 \times 0{,}8^n \\ &= 4 \times 0{,}8^n\,(1 - 0{,}8) \\ &= 4 \times 0{,}8^n \times 0{,}2 > 0 \end{aligned}$$

Pour tout n, on a démontré que $u_{n+1} > u_n$ donc la suite (u_n) est croissante.
$-1 < 0{,}8 < 1$ donc la suite géométrique $(0{,}8^n)$ de raison 0,8 converge vers 0.
$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 4 \times 0{,}8^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 5 - 4 \times 0{,}8^n = 5$
Donc la suite (u_n) est convergente vers 5.
On peut donc dire que si l'apiculteur rachète chaque année 10 000 abeilles, le nombre d'abeilles va augmenter chaque année et va tendre vers 50 000.

Partie B

1.
   - $v_{n+1} = u_{n+1} - 5c = 0{,}8u_n + c - 5c = 0{,}8\,(v_n + 5c) - 4c = 0{,}8v_n + 4c - 4c = 0{,}8v_n$
   - $v_0 = u_0 - 5c = 1 - 5c$

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = 1 - 5c$.
2. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = 1 - 5c$ donc, pour tout n,
$$v_n = v_0 \times q^n = (1 - 5c)\,0{,}8^n$$
3. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 ; or $-1 < 0{,}8 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente et a pour limite 0.
Pour tout n, $u_n = v_n + 5c$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite $5c$.
L'apiculteur veut que le nombre d'abeilles tende vers 100 000 ; il faut donc que $5c = 10$, autrement dit que $c = 2$.
Pour que le nombre d'abeilles tende vers 100 000, il faut que l'apiculteur rachète chaque année 20 000 abeilles.