

Devoir surveillé n°7 – mathématiques
09/05/2017

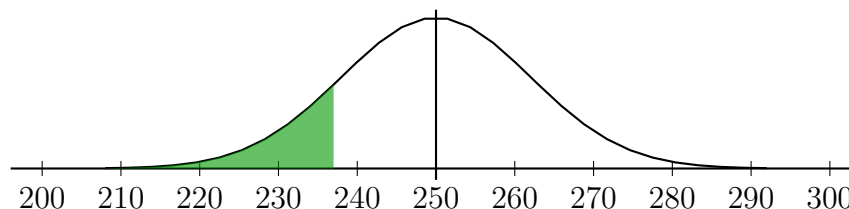
L'énoncé est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (8 points – Asie, 23 juin 2016)

Des fraises sont conditionnées en barquettes.

La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ .

La représentation graphique de la fonction densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-après :



- On donne $\mathbb{P}(X \leq 237) = 0,14$. Calculer la probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».
- On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \frac{X - 250}{\sigma}$.
 - Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
 - Démontrer que $\mathbb{P}\left(Y \leq -\frac{13}{\sigma}\right) = 0,14$.
 - En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.
- Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entiers.
 - Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[250 - n; 250 + n]$. Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.
 - On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[230 ; m]$. Déterminer la plus petite valeur de m pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice 2 (12 points – Liban, 27 mai 2015)

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
 (b) En déduire la valeur exacte de u_1 .
3. (a) Compléter l'algorithme ci-dessous (l'énoncé est à rendre avec la copie) afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ... Affecter à u la valeur ...
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

(b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,6931	0,3069	0,1931	0,1402	0,1098	0,0902	0,0475	0,0099	0,0050

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4. (a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
 (b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
5. (**Question bonus**) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Démontrer que $\ell = 0$.