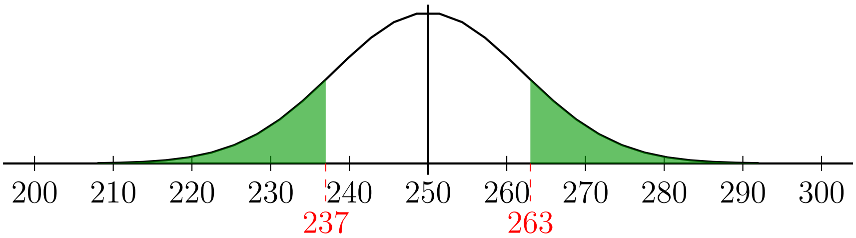
Devoir surveillé n°7 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On cherche la valeur de :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(237 < X < 263) &= \mathbb{P}(X < 263) - \mathbb{P}(X < 237) = 1 - \mathbb{P}(X > 263) - \mathbb{P}(X < 237)\\ &= 1 - \mathbb{P}(X > 250 + 13) - \mathbb{P}(X < 250 - 13)\end{aligned}$$



Étant donnée la symétrie de la courbe par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, autrement dit $x = 250$, on a $\mathbb{P}(237 < X < 263) = 1 - 2\mathbb{P}(X < 237) = 1 - 2 \times 0{,}14 = 1 - 0{,}28 = 0{,}72$.

2. (a) Comme $X \sim \mathcal{N}(250; \sigma^2)$ et $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$, on sait que $Y \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

   (b) On a $\mathbb{P}\left(Y \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}\right) = \mathbb{P}(X - 250 \leqslant -13) = \mathbb{P}(X \leqslant 237) = 0{,}14$.

   (c) Comme $\mathbb{P}\left(Y \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0{,}14$, la calculatrice nous donne $\dfrac{-13}{\sigma} \simeq -1{,}08032$.

   Ainsi $\sigma \simeq \dfrac{13}{1{,}08032} \simeq 12$.

3. (a) On doit résoudre :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(250 - n < X < 250 + n) \geqslant 0{,}95 &\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(-\frac{n}{12} < Y < \frac{n}{12}\right) \geqslant 0{,}95\\ &\Leftrightarrow 2\mathbb{P}\left(Y < \frac{n}{12}\right) - 1 \geqslant 0{,}95\\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(Y < \frac{n}{12}\right) \geqslant \frac{1{,}95}{2}\\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(Y < \frac{n}{12}\right) \geqslant 0{,}975\end{aligned}$$

   Pour $\mathbb{P}\left(Y < \dfrac{n}{12}\right) = 0{,}95$, la calculatrice donne $\dfrac{n}{12} \simeq 1{,}96$.
   Ainsi $n \simeq 12 \times 1{,}96 \simeq 23{,}51$. Il faut donc prendre $n = 24$ (plus n est grand, plus la probabilité est grande car l'amplitude de l'intervalle augmente).
   Autre méthode : on sait d'après le cours que $\mathbb{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \simeq 0{,}95$.
   Or $\mu = 250$, donc la valeur de n telle que $n = 2\sigma$ convient comme solution.
   Autrement dit $n = 2 \times 12 = 24$.

(b) On doit résoudre :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(230 < X < m) \geqslant 0{,}95 &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X < m) - \mathbb{P}(X < 230) \geqslant 0{,}95\\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X < m) \geqslant 0{,}95 + \mathbb{P}(X < 230)\\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X < m) \geqslant 0{,}95 + 0{,}5 - \mathbb{P}(230 < X < 250)\end{aligned}$$

La calculatrice donne $\mathbb{P}(230 < X < 250) \simeq 0{,}4522$. On a $0{,}95 + 0{,}5 - 0{,}4522 = 0{,}9978$ et pour $\mathbb{P}(X < m) = 0{,}9978$, la calculatrice donne $m \simeq 284{,}2$.

On prend donc pour m la valeur 285.

Exercice 2

1. $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln 2.$

2. (a) On a, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}1^{n+1} - \frac{1}{n+1}0^{n+1} = \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

   (b) On a alors $u_1 = \dfrac{1}{0+1} - u_0 = 1 - \ln 2$.

3. (a) Voici l'algorithme complété :

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur $\ln 2$
Traitement :	Pour i variant de 1 à n
	|Affecter à u la valeur $\dfrac{1}{i} - u$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   (b) La suite u semble décroissante et converger vers 0.

4. (a) Par linéarité de l'intégrale :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

   Or sur $[0;1]$ $x^n > 0$, $x+1 > 0$ et $x-1 < 0$, donc la fonction est négative et il en est de même pour l'intégrale. Ainsi, $u_{n+1} - u_n < 0$ et u est bien décroissante.

   (b) On remarque que sur $[0;1]$, $\dfrac{x^n}{1+x} > 0$, donc $u_n > 0$, autrement dit u est minorée par 0.

   Ainsi, u étant minorée et décroissante, elle converge.

5. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

   Alors, comme $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$, on en déduit que $l + l = 0$, soit $2l = 0$ puis $l = 0$.