Exercice 1 (4 points)
On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

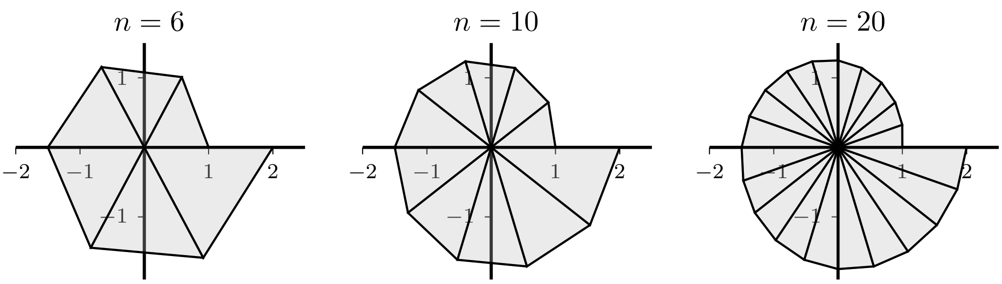
On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (a) Déterminer la forme exponentielle de a.
   (b) Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.
2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.
3. Soit M un point d'affixe z du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (a) Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec θ un nombre réel.
   (b) Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.
4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

Exercice 2 (3 points)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe 4i et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1 + \mathrm{i})^n$.

1. Écrire le nombre $1 + \mathrm{i}$ sous forme exponentielle.
2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.

Exercice 3 (5 points)
On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.
On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n, on définit les nombres complexes $z_k = \left(1 + \frac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ et on note M_k le point d'affixe z_k.
Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$, on obtient les figures ci-dessous.



Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points
Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \leqslant k \leqslant 6$, on a $z_k = \left(1 + \frac{k}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{6}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.
3. Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n+1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer la longueur OM_k.
2. Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, déterminer une mesure des angles $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_k}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.

   En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.
3. Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)\times \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.
4. On admet que l'aire du triangle OM_kM_{k+1} est égale à $a_k = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$.

   L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

VARIABLES	A est un nombre réel k est un entier n est un entier
TRAITEMENT	Lire la valeur de n A prend la valeur 0 Pour k allant de 0 à n-1 A prend la valeur $A+\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$ Fin Pour
SORTIE	Afficher A

   On entre dans l'algorithme $n = 10$

   Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726		

5. On admet que $A_2 = 0$ et que la suite (A_n) converge et que $\lim_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{7\pi}{3} \approx 7{,}3$.

   Recopier et compléter les lignes $L6$ et $L13$ de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geqslant 7{,}2$. On ne demande pas de déterminer n.

$L1$	VARIABLES :	A est un nombre réel
$L2$		k est un entier
$L3$		n est un entier
$L4$	TRAITEMENT :	n prend la valeur 2
$L5$		A prend la valeur 0
L6		**Tant que**. . . . .
$L7$		n prend la valeur $n+1$
$L8$		A prend la valeur 0
$L9$		Pour k allant de 0 à $n-1$
$L10$		A prend la valeur $A+\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$
		Fin Pour
$L12$		Fin Tant que
L13	**SORTIE :**	**Afficher** . . .

Exercice 4 (3 points)
Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n.$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5.$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	

   Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

Exercice 5 (5 points)
Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.
Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 0{,}8u_n + c.$$

Partie A
On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$.
3. Vérifier les deux conjectures établies à la question 1. en justifiant votre réponse.
   Interpréter ces deux résultats.

Partie B
L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.
On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.
On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c$.

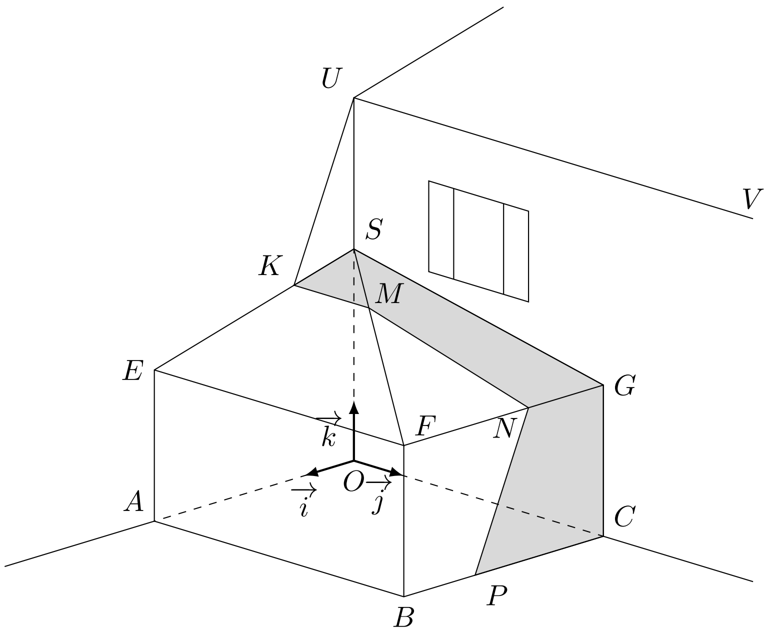
1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n)en fonction de n.
3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.

Exercice 6 (5 points)

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.

- Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires.
- Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).
- Les arêtes [UV] et [EF] des toits sont parallèles.

Le point K appartient au segment [SE], le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale KMNP qui est la limite ombre-soleil.



1. Sans calcul, justifier que :
   (a) le segment [KM] est parallèle au segment [UV] ;
   (b) le segment [NP] est parallèle au segment [UK].
2. Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées des différents points sont les suivantes : A(4 ; 0 ; 0), B(4 ; 5 ; 0), C(0 ; 5 ; 0),
   E(4 ; 0 ; 2, 5), F(4 ; 5 ; 2,5), G(0 ; 5 ; 2,5), S(0 ; 0 ; 3,5), U(0 ; 0 ; 6) et V(0 ; 8 ; 6).
   On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (UV K) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée.
   (a) Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse 1,2. Vérifier que les coordonnées du point K sont (1,2 ; 0 ; 3,2).
   (b) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (7 ; 0 ; 3) est un vecteur normal au plan (UVK) et en déduire une équation cartésienne du plan (UVK).
   (c) Déterminer les coordonnées du point N intersection du plan (UVK) avec la droite (FG).
   (d) Expliquer comment construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda.
3. Afin de faciliter l'écoulement des eaux de pluie, l'angle du segment [SG] avec l'horizontale doit être supérieur à 7°. Cette condition est-elle remplie ?