

# Chapitre :

# Exponentielle



## I. Définition

---

### Propriété (Complément de dérivation)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et soit  $a$  et  $b$  deux réels.

Alors la fonction  $g : x \mapsto f(ax + b)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et a pour dérivée  $g' : x \mapsto af'(ax + b)$

**Démonstration :** Admis

Propriété Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Si pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = f(x)$  et  $f(0) = 1$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)f(-x) = 1$ . En particulier,  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .

**Démonstration (Exigible) :** Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = f(x)f(-x)$ .  
Puisque  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , il en est de même pour  $\varphi$  et (forme  $uv$ ) :

$$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$$

(On utilise la propriété précédente pour  $x \mapsto f(-x)$ , de dérivée  $x \mapsto -f'(-x)$ )

Donc  $\varphi$  est constante. Or  $\varphi(0) = f(0)f(0) = 1$  et ainsi pour tout  $x \in \mathbb{R}$   $\varphi(x) = f(x)f(-x) = 1$ .

Si l'on suppose qu'il existe un réel  $x$  tel que  $f(x) = 0$ , alors on aurait  $f(x)f(-x) = 0$ , ce qui contredit le résultat démontré plus haut.

Propriété Il existe une unique fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = f(x)$  et  $f(0) = 1$ .

**Démonstration (Exigible) :** L'existence de la fonction est admise. Démontrons l'unicité :

Supposons qu'il existe deux fonctions  $f$  et  $g$  qui vérifient les conditions. D'après la propriété de la section précédente  $g$  en particulier ne s'annule pas. On peut donc définir  $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée :

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g^2(x)} = 0$$

Ainsi,  $\varphi$  est constante, égale à  $\varphi(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1$ . Autrement dit, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , c'est à dire  $f(x) = g(x)$ . Ainsi,  $f = g$ .

**Définition** L'unique fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = f(x)$  et  $f(0) = 1$  est appelée fonction exponentielle. On peut la noter  $\exp$ . On a donc  $\exp(0) = 1$ .

Ainsi :

Propriété La fonction  $\exp$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

► **Exercices** : 4,5,6,7p114 (dérivation)

**Propriété** | (Relation fonctionnelle) Pour tous nombres réels  $x$  et  $y$ ,

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

**Démonstration** : Soit  $y \in \mathbb{R}$ , on a  $\exp(y) \neq 0$ .

On pose alors  $\varphi : x \mapsto \frac{\exp(x + y)}{\exp(y)}$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On démontre que  $\varphi'(x) = \varphi(x)$  (ici  $\exp(y)$  est une constante!) :

$$\varphi'(x) = \frac{\exp'(x + y)}{\exp(y)} = \frac{\exp(x + y)}{\exp(y)} = \varphi(x)$$

D'autre part,  $\varphi(0) = \frac{\exp(0 + y)}{\exp(y)} = \frac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1$ .

Ainsi,  $\varphi$  satisfait les hypothèses de la propriété permettant de définir la fonction exponentielle, et donc  $\varphi(x) = \exp(x)$  par unicité.

Autrement dit, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{\exp(x + y)}{\exp(y)} = \exp(x)$ ,

c'est à dire  $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$ .

**Remarque** On dit parfois que la fonction  $\exp$  transforme les sommes en produit.

## II. Propriétés

---

**Propriété** | La fonction exponentielle est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .

**Démonstration** : Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors  $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ . D'après la relation fonctionnelle on a alors :

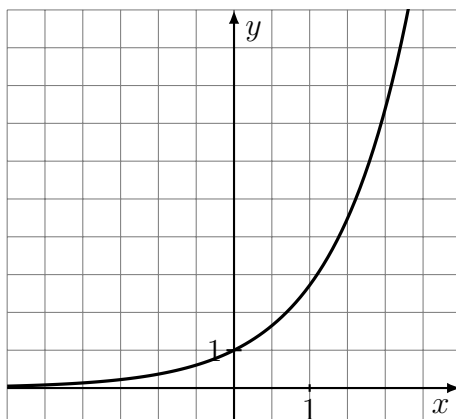
$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

Or  $\exp$  ne s'annule pas et un carré est toujours positif. Donc  $\exp(x) > 0$ .

**Propriété** | La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Démonstration** : Puisque, quelque soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp'(x) = \exp(x)$  et  $\exp(x) > 0$ , il est immédiat que  $\exp$  est strictement croissante.

La courbe de la fonction exponentielle est la suivante :



**Propriété** | Soit  $a$  et  $b$  des nombres réels, et soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Les égalités suivantes sont conséquence de la relation fonctionnelle :

$$\exp(2a) = (\exp(a))^2 \quad \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \quad \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \quad \exp(na) = (\exp(a))^n$$

**Démonstration** : Exercice. La dernière se fait par récurrence sur  $n$ .

► **Exercices** : 12,13,14p114 (simplification)

**Définition (Nombre  $e$ )** On note  $e$  le nombre  $\exp(1)$ . Ainsi,  $\exp(1) = e$ .

D'après la propriété précédente, quelque soit  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$$

On généralise cette égalité, et on note, pour tout réel  $x$  :  $\exp(x) = e^x$ .

On retrouve alors, notées différemment, les propriétés vues plus tôt :

Pour tous réels  $x$  et  $y$  et pour tout entier  $n$  :

$$x \mapsto e^x \text{ a pour dérivée } x \mapsto e^x$$
$$e^0 = 1 \quad e^x > 0 \quad e^{x+y} = e^x e^y \quad e^{nx} = (e^x)^n$$
$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

► **Exercices** : 16,17,18,19p114 et 68,69p116 (simplification)

► **Exercice** : 73p116 (suites)

► **Exercices** : 105p118 (dérivation), 107,108,109p118 (variations, sans limites)

**Propriété** | (**Équations et inéquations**) Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels. Alors :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

et

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

**Démonstration** : Cela provient de la stricte croissance de la fonction exponentielle

Cette propriété a pour intérêt principal de permettre la résolution de certaines équations mettant en jeu l'exponentielle.

**Exemple** Soit à résoudre l'équation  $e^{2x+5} = e^9$ .

Cette équation équivaut à  $2x + 5 = 9$ , soit à  $x = 2$ . Ainsi,  $\mathcal{S} = \{2\}$ .

► **Exercices** : 79,80p116 (équations), 82,84p117 (inéquations), 86p117 (étude de signe)

► **Exercice** : 111p118 (variations, sans limites)

## III. exponentielle de $u$

---

**Propriété** | Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Alors la fonction  $e^u$  est dérivable sur  $I$  et a pour dérivée la fonction  $u'e^u$ .

De plus,  $e^u$  a le même sens de variations que  $u$ .

**Démonstration** : La première partie est admise.

Pour la seconde partie, comme  $e^u > 0$ , alors  $u'e^u$  a le même signe que  $u$ , donc  $u$  et  $e^u$  ont les mêmes variations.

**Exemple** Étudier la fonction  $f : x \mapsto e^{-4x}$ ; Voir page 112 pour d'autres exemples.

- ▶ **Exercices** : 50,52p115 (dérivation), 54p115 (variations)
- ▶ **Exercices** : 122,123p119 (dérivation)
- ▶ **Exercice** : 133p119 (problème)
- ▶ **Exercice** : (ACCPE / groupe) : activité 1p104 (sous-tangente constante)

# IV. Limites

---

**Propriété** | On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

**Démonstration (exigible) :**

- Soit  $f(x) = e^x - x$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = e^x - 1$ .  
Par suite,  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ . Donc  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .  
Or  $f(0) = 1 > 0$ . Donc, pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) > 0$ . Autrement dit, quelque soit  $x \geq 0$ ,  $e^x > x$ .  
Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ . Donc, par comparaison,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

- Par réécriture, changement de variable, et la limite déjà déterminée :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

**Propriété** | On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

**Démonstration :**

- Soit  $f : x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $I = [0; +\infty[$  et  $f'(x) = e^x - x$ .  
On a vu plus haut que  $f'$  est strictement positive sur  $I$ . Donc  $f$  est croissante sur  $I$ .  
Or  $f(0) = 1 > 0$ . Donc, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) > 0$ , autrement dit  $e^x > \frac{x^2}{2}$ .

En divisant par  $x > 0$ , on obtient  $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ .

Donc par comparaison,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

- On a  $x e^x = \frac{x}{e^{-x}} = -\frac{-x}{e^{-x}}$ . Donc :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{-x}{e^{-x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0$ .  
(il s'agit de l'inverse de la limite déterminée précédemment)

- On sait que la fonction  $\exp : x \mapsto e^x$  est dérivable, de dérivée elle-même. Or  $\exp(0) = 1$ .

Donc par définition du nombre dérivé,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = 1$ , soit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

**Remarque** | On retient les deux premières limites de la propriété précédente en se rappelant que l'exponentielle l'emporte.

► Exercices : 36,38,39,40p115

► Exercices : 48,49p115 ( $e^u$ )

► Exercices : 94,95,96,97p117

► Exercices : 119,120p118