Chapitre :
Nombres complexes

∽

⊛ **Activité :** Fiche d'introduction (Formule de Cardan et nombre imaginaire)

I. Définition

1. Forme algébrique

Définition Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes**, qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
- Les règles de calcul de l'addition et de la multiplication prolongent celles des nombres réels (donc restent les mêmes que celles des nombres réels).
- Il existe un nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit **de manière unique** $z = x + iy$ avec x et y réels.

L'écriture $z = x + iy$ avec x et y réels est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z.

- ⋆ x est la **partie réelle** de z, notée $Re(z)$;
- ⋆ y est la **partie imaginaire** de z notée $Im(z)$.

Remarque Soit $z = x + iy$ avec x et y réels :
Si $y = 0$, alors $z = x$ et le nombre complexe est un nombre réel.
Si $x = 0$, alors $z = iy$ et le nombre est dit **imaginaire pur**.

⚠ Le nombre $y = Im(z)$ est un nombre réel. C'est iy qui est imaginaire pur.

Exemple On cherche l'écriture algébrique de $z = (5 + 2i)(2 - 4i)$.
Pour cela on applique les règles de calcul connues :

$$\begin{aligned}
(5+2i)(2-4i) &= 5 \times 2 - 5 \times (4i) + 2i \times 2 - 2i \times 4i \\
&= 10 - 20i + 4i - 8i^2 \\
&= 10 - 16i - 8 \times (-1) \\
&= 10 - 16i + 8 \\
&= 18 - 16i
\end{aligned}$$

La partie réelle de z est 18, et $Im(z) = -16$.

▶ **Exercice :** 1p210 (identifier partie imaginaire et réelle)

▶ **Exercices :** 3,4p210 et 36,37p212 (déterminer l'écriture algébrique)

⊛ **Activité :** 2p198 (forme algébrique de l'inverse)

Propriété Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Alors :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

Cela donne la forme algébrique de l'inverse d'un nombre complexe.

Démonstration : Il suffit de multiplier et diviser par $x - iy$.

Remarque $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$

▶ **Exercices :** 39,40p212

▶ **Exercices :** (groupe) 44,45,46,47,50,51,53p212

2. Égalité

Remarque Par unicité de l'écriture d'un nombre complexe z sous la forme $x + iy$, on a donc :
Soit x, y, x' et y' des nombres réels,
$x + iy = x' + iy'$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.
$x + iy = 0$ équivaut à $x = 0$ et $y = 0$.

Par conséquent :

Propriété

- Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle;
- Un nombre complexe est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle.

▶ **Exercices :** 56,57,58p212 (recherche de conditions pour avoir un réel ou imaginaire pur)

II. Nombre conjugué

Définition Soit z un nombre complexe, $z = x + iy$.
Le **nombre conjugué** de z, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe $x - iy$.

Exemple Exercice 7p210

Propriété Soit z un nombre complexe.

1. z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$, autrement dit si $\overline{z} - z = 0$.
2. z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$, autrement dit si $\overline{z} + z = 0$.

Démonstration : On pose $z = x + iy$, avec x et y réels :

1.
   - Si z est réel, alors $z = x$ et $\overline{z} = x$, donc $z = \overline{z}$.
   - Si $z = \overline{z}$, alors $x + iy = x - iy$, donc $2iy = 0$ et on en déduit que $y = 0$ ce qui signifie que z est réel.
2.
   - Si z est imaginaire pur, alors $z = iy$ et $-\overline{z} = -(-iy) = iy$, donc $z = -\overline{z}$.
   - Si $z = -\overline{z}$, alors $x + iy = -x + iy$, donc $2x = 0$ et $x = 0$. z est donc bien un imaginaire pur.

Propriété Pour tous nombres complexes z et z' :

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{\overline{z}} = z$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \qquad \text{pour } z \neq 0,\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\text{pour } z' \neq 0,\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \qquad \text{pour } n \in \mathbb{Z},\ \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

Remarque Pour tout nombre complexe z, on a les relations $Re(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $Im(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

► **Exercices :** 8p210 et 65,68p213 (conjugué d'expressions complexes)

► **Exercice :** 69p213 (somme réelle, soustraction imaginaire)

► **Exercices :** 72,73p213 (équations avec $\overline{z}$)

III. Résolution dans $\mathbb{C}$ de $az^2 + bz + c = 0$

⊛ **Activité :** : de quels nombres 4 est-il le carré ? Et -4 ?

Propriété l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c réels, $a \neq 0$) admet toujours des solutions dans $\mathbb{C}$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

1. Si $\Delta = 0$: une solution réelle égale à $-\dfrac{b}{2a}$;
2. Si $\Delta \neq 0$: deux solutions distinctes :
   - réelles si $\Delta > 0$: $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
   - complexes conjuguées si $\Delta < 0$: $\dfrac{-b}{2a} + i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b}{2a} - i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration : La forme canonique du trinôme $az^2 + bz + c$ (a, b et c réels, $a \neq 0$) est $a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.
Si $\Delta \geq 0$, on retrouve les résultats vus en première.
Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$. On pose $\delta = -\Delta$. Puisque $\delta > 0$, on peut écrire $\delta = (\sqrt{\delta})^2$.
On a alors : $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - i^2\left(\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)^2\right]$.

$az^2+bz+c=a\left(z+\dfrac{b}{2a}-i\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)\left(z+\dfrac{b}{2a}+i\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)$.
Les solutions de l'équation sont donc :

$$-\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{\delta}}{2a}=-\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad -\frac{b}{2a}-i\frac{\sqrt{\delta}}{2a}=-\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

▶ **Exercices :** 79,81p214 (basique) (le 80 n'est pas intéressant : $\Delta > 0$)

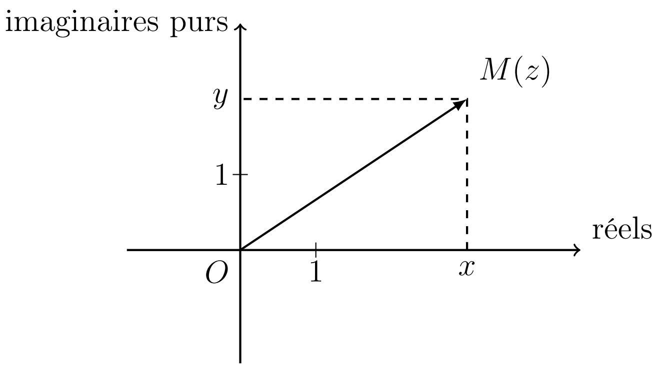
▶ **Exercices :** 84,86p214

▶ **Exercice :** (algo) 82p214

IV. Représentation graphique

Considérons le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O.

1. À tout nombre complexe $z = x + iy$, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$.
   On dit que M est le **point image** de z et que $\overrightarrow{OM}$ est le **vecteur image** de z.
   On note $M(z)$
2. Tout point $M(x; y)$ est le point image d'un seul complexe $z = x + iy$.
   On dit que z est l'**affixe** du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
   On note $z = z_M$ et $z = z_{\overrightarrow{OM}}$.
3. Le plan est alors appelé **plan complexe**.
4. L'axe des abscisses (Ox) est appelé **axe des réels** ;
   L'axe des ordonnées (Oy) est appelé axe des **imaginaires purs**.



<u>**Exemple**</u> Le point $I(0,1)$ est l'image de i. Autrement dit, le point d'affixe i est $I(0; 1)$.

Propriété **(Affixe d'un vecteur quelconque)** Soit deux points A et B du plan complexe ayant pour affixes respectives z_A et z_B.
Alors l'affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.

Démonstration : Puisque $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, on a :

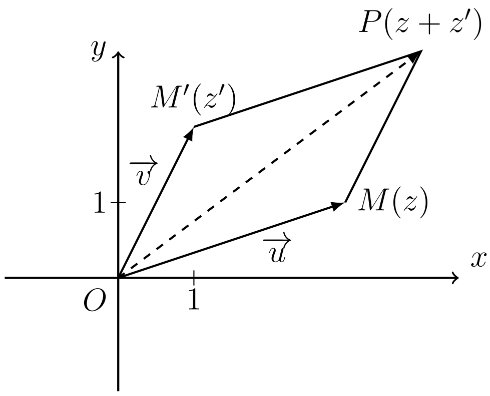
$$z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = x_B - x_A + iy_B - iy_A = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = z_B - z_A$$

Propriété **(Opérations sur les vecteurs)** Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Soit k un réel. Alors :

$$z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}} \qquad \text{et} \qquad z_{k\overrightarrow{u}} = kz_{\overrightarrow{u}}$$

Démonstration : Se fait de même que la précédente en utilisant les coordonnées des vecteurs.

Remarque Soient M d'affixe z et M' d'affixe z' des points du plan complexe.
$z + z'$ est l'affixe du point P tel que $OMPM'$ est un parallélogramme.



Propriété **(Affixe du milieu)** Soit A et B deux points du plan. Soit I le milieu de $[AB]$. Alors :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Démonstration : Se fait de même que précédemment, en utilisant les coordonnées des points.

▶ **Exercices :** 12,13,14p210

▶ **Exercices :** 90,92p214 et 93,94,96p215

▶ **Exercice :** (algo) 91p214

V. Module et argument

⊛ **Activité :** 4p199
On considère le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

1. Définitions

Définition (Module)
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, et soit M l'image de z dans le plan complexe.
Le module de z, noté $|z|$, est la distance OM. On a alors :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Remarque

- le module généralise la valeur absolue aux nombres complexes :
  Le module d'un nombre réel est sa valeur absolue.
- $|z| = 0$ est équivalent à $z = 0$.
- $|z|^2 = z\bar{z}$.

Propriété Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Alors $AB = |z_B - z_A|$.

Démonstration : On rappelle que $z_B - z_A = z_{\overrightarrow{AB}}$. Soit M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Alors par définition $|z_B - z_A| = OM$ est aussi la norme du vecteur $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$, donc AB.

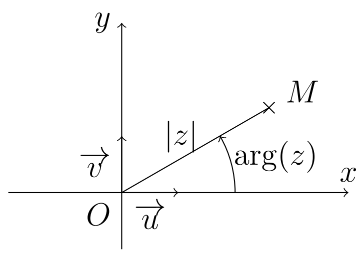
▶ **Exercices :** 16,17p210

▶ **Exercices :** 100,102,107p215 (liste pouvant être complétée)

Définition (argument)
Soit z un nombre complexe **non nul** d'image M. On appelle argument de z toute mesure en radian de l'angle orienté :

$$\arg(z) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$$

Il est unique à 2π près (si θ est un argument, $\theta + 2k\pi$ en est un pour tout $k \in \mathbb{Z}$).



Remarque

- Tout nombre réel positif a un argument égal à 0 ;
- Tout nombre réel négatif a un argument égal à π ;

- Tout nombre imaginaire pur iy avec $y > 0$ a un argument égal à $\frac{\pi}{2}$;
- Tout nombre imaginaire pur iy avec $y < 0$ a un argument égal à $-\frac{\pi}{2}$.

Propriété Soit A et B deux points d'affices respectives z_A et z_B. Alors $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$.

Démonstration : Avec les mêmes notations que pour la propriété sur le module,
$(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM}) = \arg(z_B - z_A)$

▶ **Exercices :** 22,23p211 ; 24p211 en DM ou en groupe

VI. Forme trigonométrique

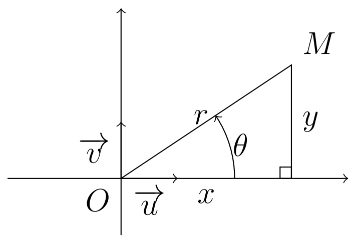
1. Définition

Remarque (∼ hors programme) Soit z un nombre complexe non nul. Son module r et son argument θ permettent de caractériser son image M sur le plan, au même titre que les coordonnées $(x;y)$.
Le couple $(r;\theta)$ forme alors ce que l'on appelle les **coordonnées polaires** du point M.
On passe des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta$$

En effet, d'après la figure ci-contre,

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} \quad \text{et} \quad \cos(\theta) = \frac{x}{r}$$



Définition (Forme trigonométrique)
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe de module r et d'argument θ.
D'après la remarque précédente, on a :

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

La dernière expression est appelée forme trigonométrique de z.

Grâce à l'unicité de la forme algébrique, on a les propriétés :

Propriété Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont le même module et le même argument à 2π près.

Propriété Soit $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $\rho > 0$. Alors $\rho = |z|$ et $\alpha = \arg(z)$.

Méthode Soit $z = x + iy$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique.
Pour déterminer un argument de z, on calcule d'abord son module, $r = \sqrt{x^2+y^2}$. On a alors :

$$z = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Il faut alors chercher un angle θ tel que

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

▶ **Exercices :** 114,115p216 (algébrique vers trigonométrique)

▶ **Exercices :** 117,118p216 (trigonométrique vers algébrique)

▶ **Exercice :** Fiche (placement de points, images de nombres complexes)

2. Propriétés

Propriété Soit z un nombre complexe. Alors :

1. $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.
2. $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$.

Propriété Soit z et z' des nombres complexes non nuls. Alors :

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
2. $|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)$.
4. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Démonstration : Le premier point se retrouve en prenant un point de vue géométrique.
Prouvons le second point. Écrivons les formes trigonométriques de z et z' : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$.
Lorsque l'on fait le produit des deux, et en regroupant les termes développés, on a :

$$zz' = rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i\left(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\right)\right]$$

Or, $\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' = \cos(\theta + \theta')$ et $\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' = \sin(\theta + \theta')$, d'où le résultat.
Le troisième point se fait par récurrence.
Le dernier point vient du second, puisque $|z| = \left|z' \times \frac{z}{z'}\right|$.

▶ **Exercices :** 123,124,126,128p216

Remarque (Importante)
Si $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ sont quatre points du plan complexe deux à deux distincts, alors :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad \text{et} \quad \frac{CD}{AB} = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|$$

La première égalité vient de la relation de Chasles :
$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{u},\overrightarrow{AB}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
En particulier, on a :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad \text{et} \quad \frac{AC}{AB} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right|$$

Cela permet de vérifier la nature de quelques triangles ABC, souvent étudiée dans les exercices.

▶ **Exercices :** 149,150,151p217 (triangles)

▶ **Exercices :** 154,155p218 (quadrilatères)

VII. Notation exponentielle

⊛ **Activité :** Soit $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Observer que $f(\theta+\theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ puis calculer $f(0)$. Trouver une analogie avec une fonction connue.

Définition Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
Par suite, quelque soit le nombre complexe z de module r et d'argument θ, on a la notation $z = re^{i\theta}$, ce que l'on appelle **notation exponentielle** de z.

Exemple $e^{i0} = 1; e^{i\frac{\pi}{2}} = i; e^{i\pi} = -1$ et $2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

Propriété Soit θ et θ' dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg e^{i\theta} = \theta$ ($e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ)
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (formule de Moivre)

Démonstration : le premier point vient de la définition. Les suivants viennent des propriétés de module et d'argument.

La formule de Moivre permet d'obtenir les forme algébriques de puissances de nombres complexes.

Exemple Soit $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$ (voir plus haut).
Alors $z^5 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5 = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2^5\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^4 - i2^4\sqrt{3}$.

▶ **Exercices :** 138,139p217

▶ **Exercice :** 156p218 (erreur : $ABDC$ est le quadrilatère en question, et pas $ABCD$)