Chapitre :
Géométrie dans l'espace

I. Rappels

On rappelle ici les définitions et propriétés de géométrie vues en seconde sur les positions relatives de droites et de plans, avec quelques modifications.

Définition On dit que deux droites sont **coplanaires** si elles sont incluses dans un même plan.

Méthode Pour démontrer que deux droites sont coplanaires, on détermine donc le plan qui les contient toutes les deux.

Exemple Les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A, donc elles déterminent un plan : le plan (ABC). Par conséquent (AB) et (AC) sont coplanaires.

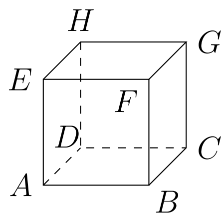
Définition On dit que **deux droites** de l'espace **sont parallèles** si elles sont coplanaires et si elles sont parallèles dans le plan qui les contient.

Propriété Deux droites parallèles distinctes déterminent un plan.

Remarque Dans l'espace, deux droites peuvent ne pas être sécantes tout en n'étant pas parallèles.

Exemple
Dans ce cube $ABCDEFGH$, chaque face étant incluse dans un plan on a par exemple :

- (AB) et (DC) sont parallèles (car elles sont dans le plan (ABC) et elles sont parallèles dans ce plan) ;
- (AB) et (CG) ne sont ni sécantes ni parallèles.



Définition Considérons **deux plans**.
Ils sont sécants s'ils sont distincts et qu'ils se coupent. Leur intersection est alors une droite.
Ils **sont parallèles** s'ils ne sont pas sécants, autrement dit s'il n'ont pas de point commun ou s'ils sont confondus.

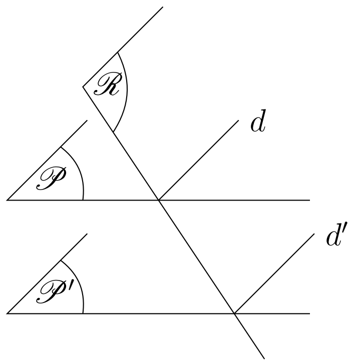
Définition Considérons **une droite et un plan**. Ils sont sécants s'ils ont un seul point en commun. Ils **sont parallèles** si ils ne sont pas sécants, autrement dit s'ils n'ont pas de point commun ou si la droite est contenue dans le plan.

Propriété

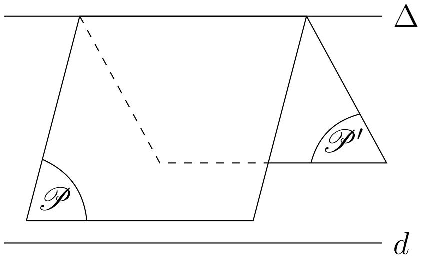
- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles.
- Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles.

Certaines démonstrations des propriétés suivantes sont disponibles dans le livre à la page 234.

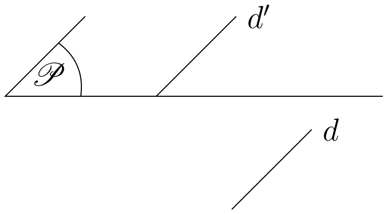
Propriété Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans parallèles. Tout plan $\mathscr{R}$ qui coupe $\mathscr{P}$ coupe aussi $\mathscr{P}'$ et les droites d'intersection d et d' sont parallèles.



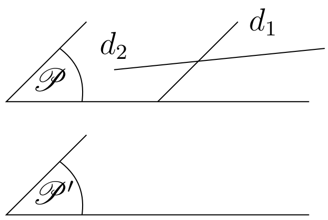
Théorème **(du toit)** Soit d une droite parallèle à deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sécants en une droite Δ. Alors d est parallèle à Δ.



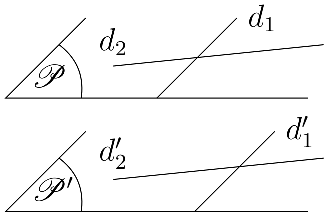
Propriété Soit d et d' deux droites parallèles. Alors tout plan contenant d' est parallèle à d.



Propriété Si deux droites sécantes formant le plan $\mathscr{P}$ sont parallèles à un plan $\mathscr{P}'$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.



Corollaire Si deux droites sécantes formant le plan $\mathscr{P}$ sont parallèles à deux droites sécantes formant le plan $\mathscr{P}'$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.



▶ **Exercices :** 3,7,10p244

▶ **Exercices :** 37,40p246 (53p247 en DM ?) + 38,41p246 et 51,52p247

II. Vecteurs dans l'espace

On étend les définitions et propriétés des vecteurs du plan à l'espace. En particulier :

Propriété

1. Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$, où k est un réel. Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

2. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

► **Exercices :** 78,79p249

Nous savons déjà, en géométrie plane, que l'on peut munir le plan d'un repère $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs non colinéaires.
Cela signifie qu'un point M appartient au plan si et seulement si il existe x et y réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$. Le couple $(x; y)$ forme alors les coordonnées du point M.
Dans l'espace on a alors :

Propriété Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$, avec x et y des réels quelconques, est un plan passant par A.
Autrement dit, un plan de l'espace est entièrement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Démonstration : Voir le livre page 238

<u>Définition</u> (vecteurs coplanaires) Des vecteurs de l'espace sont coplanaires si et seulement si leurs représentants de même origine A ont leurs extrêmités dans un même plan passant par A.

On peut démontrer par calcul que des vecteurs sont coplanaires ou non, en particulier pour trois :

Propriété
Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe trois réels a, b et c non tous nuls tels que $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

Démonstration : Il y a deux cas pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors nécessairement $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.
  - ⋆ Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $1\overrightarrow{u} + 0\overrightarrow{v} + 0\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
  - ⋆ Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$. Alors $k\overrightarrow{u} - 1\overrightarrow{v} + 0\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, fixons un point A de l'espace.
  Soit alors B, C et M tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{w}$.
  Le plan (ABC) est déterminé par le point A et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Par suite, les trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si A, B, C et M sont coplanaires, autrement dit si $M \in (ABC)$. C'est le cas si et seulement si il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$, donc tels que $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} - 1\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

Remarque Pour démontrer que trois vecteurs **ne sont pas** coplanaires, il suffit donc de démontrer que l'égalité $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ implique $a = b = c = 0$.

▶ **Exercices :** 83,84p249 +86p249 et 87p250

Propriété

- Une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.
- Deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si et seulement si deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$ sont respectivement égaux à deux vecteurs du plan $\mathscr{P}'$.

▶ **Exercices :** 88,89p250

III. Repérage dans l'espace

Alors qu'un plan est déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires, l'espace est lui déterminé par un point et trois vecteurs non coplanaires.
En effet :

Propriété Soit $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Alors pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ il existe un unique triplet $(x;y;z)$ tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.

Démonstration :

•**Existence :** Soit O et A deux points tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$.

Soit Δ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{k}$.

Soit $\mathscr{P}$ le plan caractérisé par le point O et les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$

Puisque $\overrightarrow{k}$ n'est pas coplanaire avec $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en un point M.

Puisque $M \in \mathscr{P}$, il existe un couple $(x;y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

D'autre part, $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$, donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{MA} = z\overrightarrow{k}$.
Par suite, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.

•**Unicité :** Si $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$, alors $(x-x')\overrightarrow{i} + (y-y')\overrightarrow{j} + (z-z')\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$.

Or les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont non coplanaires. Donc $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

Par suite :

Définition Un repère de l'espace est un quadruplet $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ où O est un point de l'espace et les trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont non coplanaires.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, les réels x, y et z tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ sont les **coordonnées** de $\overrightarrow{u}$.
Soit M un point de l'espace. Les coordonnées de M dans le repère sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
x est l'abscisse, y l'ordonnée et z **la cote**.

Définition Soit $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de l'espace.
Soit I, J et K tels que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{k}$. On dit que le repère est **orthonormé** si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont deux à deux perpendiculaires, et si $OI = OJ = OK = 1$.

Les calculs sur les coordonnées des vecteurs de l'espace généralisent ceux des vecteurs du plan.

Propriété
Soit $\overrightarrow{u}(x;y;z)$ et $\overrightarrow{v}(x;y;z)$ deux vecteurs et soit $k \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ si et seulement si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$;
- $\overrightarrow{u+v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y'; z + z')$;
- $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky; kz)$.

Démonstration : Voir le livre page 240.

▶ **Exercices :** 22p245
On peut aussi considérer les longueurs et les milieux de segments de l'espace :

Propriété
Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace.

- $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_C - z_A)$.
- Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Si le repère est orthonormé, alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2}$.

Démonstration : Voir le livre page 240.

▶ **Exercices :** 24,26,27,28p245 puis 96,97,98,99p250

▶ **Exercices :** (coplanarité) 29p245 et 101,103p250 et 108p251

IV. Systèmes d'équations paramétriques

⊛ **Activité :** 4p233 (randonneurs se déplaçant en ligne droite)

Propriété Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a; b; c)$.
Un point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + ta \\ y & = & y_A + tb \\ z & = & z_A + tc \end{array}\right.$$

Démonstration : Cela vient simplement du fait que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$.
Le système d'équation définit une **représentation paramétrique** de la droite, le nombre t étant le paramètre du point M de la droite.

▶ **Exercices :** 113,114,115,116,117,119p251
On peut également donner la représentation paramétrique d'un plan.

Puisqu'un plan est caractérisé par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}(a; b; c)$ et $\overrightarrow{v}(a'; b'; c')$, un point $M(x; y; z)$ appartient au plan si et seulement si il existe des réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x &= x_A + ta + t'a' \\ y &= y_A + tb + t'b' \\ z &= z_A + tc + t'c' \end{cases}$$

Le couple $(t; t')$ est appelé couple de paramètres du point M.

► **Exercices :** 122,123,124p252

V. Orthogonalité

Définition Deux droites (d_1) et (d_2) sont **orthogonales** s'il existe une droite (d_1') parallèle à (d_1) et une droite (d_2') parallèle à (d_2) telles que (d_1') et (d_2') soient perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.

Propriété Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Démonstration : Notons (d_1) et (d_2) deux droites parallèles, et Δ une droite orthogonale à (d_1).
Il existe donc une droite (d_1') parallèle à d_1' et une droite Δ' parallèle à Δ telles que (d_1') et Δ' soient perpendiculaires.
Or (d_1) et (d_2) sont parallèles, donc (d_1') est parallèle à (d_2), et on en déduit que (d_2) et Δ sont orthogonales.

Définition Une droite $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à un plan $\mathscr{P}$ si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathscr{P}$.

Théorème Si une droite $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à un plan $\mathscr{P}$, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Démonstration : Activité 2p232. Rappel de la formule d'Al-Kashi : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{c}$.

Propriété

- Il existe une unique droite (d) passant par un point A et perpendiculaire à un plan $\mathscr{P}$ donné.
- Il existe un unique plan $\mathscr{P}$ passant par un point A donné et perpendiculaire à une droite (d) donnée.
- Si $(d)//(d')$, tout plan $\mathscr{P}$ perpendiculaire à (d) est perpendiculaire à (d').
- Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.
- Si $\mathscr{P}//\mathscr{P}'$, toute droite (d) perpendiculaire à $\mathscr{P}$ est perpendiculaire à $\mathscr{P}'$.

Démonstration : Voir le livre page 236.

Définition (Plan médiateur) Le plan médiateur $\mathscr{P}$ d'un segment $[AB]$ est le plan qui passe par le milieu I de $[AB]$ et qui est perpendiculaire à (AB).

Propriété Le plan médiateur de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et B.

Démonstration : Admis

► **Exercices :** 12p244, 65,68,70p248

VI. Produit scalaire et applications

1. Définitions

On définit le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace comme étant celui de leurs représentant dans un plan. Autrement dit :

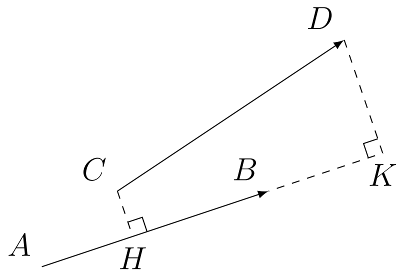
Définition Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Soit A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$. Alors il existe (au moins) un plan $\mathscr{P}$ qui contient les points A, B et C. On définit alors le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ comme étant le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans $\mathscr{P}$. Ainsi :

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$;
- Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Les propriétés du produit scalaire dans le plan s'appliquent alors :

Propriété

- Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Alors :
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$$
où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et K est le projeté orthogonal de B sur (AC).
- Plus généralement, on peut projeter un vecteur sur l'autre, à condition qu'ils soient dans le même plan (la projection n'existe pas dans le cas contraire) :



Les points H et K étant les projetés respectifs de C et D sur (AB), on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HK}$
- Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et k un réel. Alors :
$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} \qquad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} \qquad \overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$$

Définition On dit que deux vecteurs sont **orthogonaux** s'ils dirigent des droites orthogonales.
On considère que le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

Propriété Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

▶ **Exercices :** 1,3,5,6,7p274

▶ **Exercices :** 53,54,56p276

$\boxed{\textbf{Propriété}}$ **(Expression analytique)** On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$.
Soit $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$. Alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.
En particulier, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = x^2 + y^2 + z^2$, et $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Démonstration : Par définition, $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$. On applique alors les formules données plus haut, en utilisant le fait que les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont orthogonaux deux à deux et de longueur 1.

► **Exercices :** 9,11,14p274

► **Exercices :** 59,61p276

2. Équation cartésienne d'un plan

a. Vecteur normal

Définition On vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul est dit **normal** à un plan si ce vecteur est un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à ce plan.

Théorème Une droite (d) est orthogonale à toute droite d'un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) de ce plan.

Il s'agit du théorème déjà rencontré dans la section précédente.
Démonstration (exigible) : Si (d) est orthogonale à toutes les droites, alors elle est orthogonale à (d_1) et (d_2).
On démontre la réciproque. Pour cela on suppose que (d) est orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) du plan.
Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ des vecteurs directeurs de (d), (d_1) et (d_2).
Alors par hypothèse, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$.
Soit Δ une droite du plan et $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur de Δ.
On doit démontrer que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 0$.
Or, (d_1) et (d_2) étant sécantes, les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$, et par conséquent il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2}$.
Par suite, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot (x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2}) = x\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$.

▶ **Exercices :** 18,21,22,23,24,25p274

▶ **Exercices :** 69,70p277

b. Équation d'un plan

⊛ **Activité :** 2p266 (équation cartésienne d'un plan)

Propriété Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.
L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

Démonstration : Voir le livre page 270.

Propriété Dans un repère orthonormé, un plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a; b; c)$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
Réciproquement, si a, b et c ne sont pas tous nuls, l'ensemble (E) des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a; b; c)$.

Démonstration (exigible) : On fixe un point $A(x_0; y_0; z_0)$ de $\mathscr{P}$. Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace. Alors $\overrightarrow{AM}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, puis :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cy_0) = 0 \end{aligned}$$

En posant $d = -(ax_0 + by_0 + cy_0)$, on a bien $ax + by + cz + d = 0$.

Réciproquement, puisque a, b et c ne sont pas tous nuls, on peut supposer par exemple que a est différent de 0. Alors $A\left(-\dfrac{d}{a};0;0\right)$ appartient à (E). L'équation $ax+by+cz+d=0$ équivaut alors à $a\left(x+\dfrac{d}{a}\right)+by+cz=0$, c'est à dire à $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0$. L'ensemble (E) est donc le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$.

▶ **Exercices :** 26,27,28,31,32p275

▶ **Exercices :** 76,77,78,82,84p277

▶ **Exercices :** 87,88,89,90,91p278

VII. Intersection de droites et de plans

Propriété Soit (d) une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas orthogonaux, la droite (d) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.
- Sinon, (d) et $\mathscr{P}$ sont parallèles et (d) est incluse dans le plan si et seulement si $A\in\mathscr{P}$.

⊛ **Activité :** 3p267 (intersection de plans)

Propriété Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$.
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont colinéaires.
Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants, alors leur intersection est une droite.

Corollaire On se place dans un repère orthonormé.
Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ sont parallèles si et seulement si $(a;b;c)$ est proportionnel à $(a';b';c')$.
Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants, alors l'ensemble des points de coordonnées $(x;y;z)$ qui vérifient :

$$\begin{cases} ax+by+cz+d &= 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' &= 0 \end{cases}$$

est une droite.

Démonstation : les vecteurs de coordonnées $(a;b;c)$ et $(a';b';c')$ sont des vecteurs normaux à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. D'après la propriété précédente, les plans sont parallèles si et seulement si les vecteurs sont colinéaires, ce qui équivaut au fait que leurs coordonnées sont colinéaires.
L'intersection de deux plans étant une droite, l'ensemble des points appartenant aux deux plans, donc dont les coordonnées satisfont les deux équations, est une droite.

Définition Deux plans sont perpendiculaires si l'un des deux contient une droite perpendiculaire à l'autre.

Propriété Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$.
Les deux plans sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont orthogonaux.

▶ **Exercices :** 41,42,43p275 (droites et plans)

▶ **Exercices :** 44p275, 109,110,111p279 (plans sécants ou parallèles)

▶ **Exercices :** 114,116,118,119,120p280