

Chapitre :

Trigonométrie



I. Définitions

Définition

- La fonction **sinus** est la fonction qui, à tout réel x , associe $\sin(x)$.
- La fonction **cosinus** est la fonction qui, à tout réel x , associe $\cos(x)$.

Propriété

- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur \mathbb{R} .
- Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur \mathbb{R} , et pour tout réel x ,

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

- En conséquence,
 - ★ si $f(x) = \sin(ax + b)$, alors f est dérivable et $f'(x) = a \cos(ax + b)$
 - ★ si $f(x) = \cos(ax + b)$, alors f est dérivable et $f'(x) = -a \sin(ax + b)$

Démonstration : Les trois premiers points sont admis.

Le troisième est une application de la formule de dérivation de $x \mapsto g(ax + b)$.

Propriété (Périodicité)

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π , ce qui signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

Propriété (Parité)

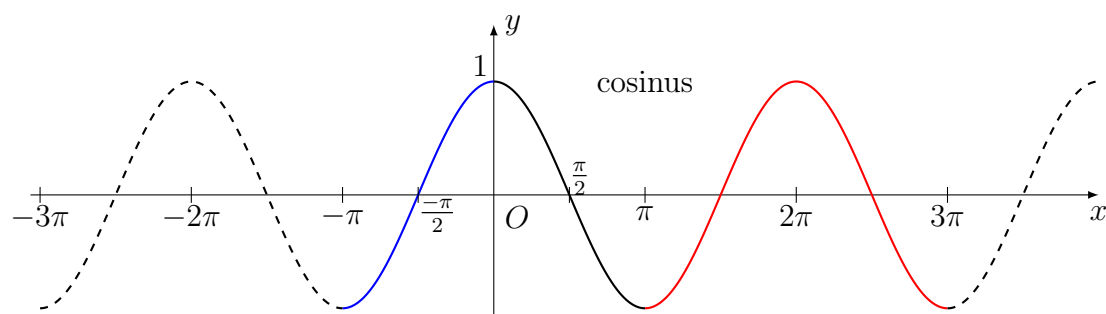
- La fonction sinus est **impaire**, ce qui signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$;
- La fonction cosinus est **paire**, ce qui signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$;

II. variations

Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus, on peut déjà dresser son tableau de variations sur $[0; \pi]$:

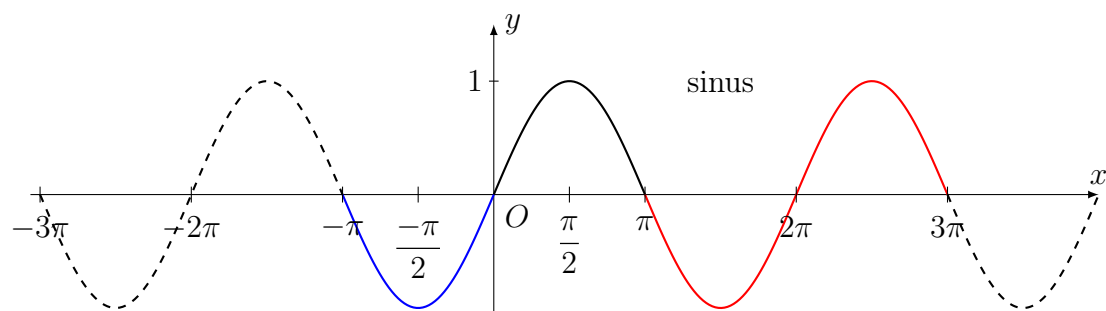
x	0	π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	0
variations de cos	1	-1

Ensuite, grâce à la parité de la fonction cosinus on peut compléter sur $[-\pi; 0]$; finalement on reporte sur les autres intervalles grâce à la périodicité.



La partie noire pleine est la représentation sur $[0; \pi]$, la partie bleue est obtenue grâce à la parité (fonction paire donc symétrie par rapport à l'axe des ordonnées) et la partie rouge est obtenue grâce à la périodicité (translation de vecteur $2\pi \vec{i}$).

Pour la fonction sinus, la courbe est la suivante (obtenue par le même moyen, voir page 80) :



la partie noire pleine est la représentation sur $[0; \pi]$, la partie bleue est obtenue grâce à la parité (fonction impaire donc symétrie par rapport à l'origine) et la partie rouge est obtenue grâce à la périodicité (translation de vecteur $2\pi \vec{i}$).

- Exercices : 17,24-27p84 (dérivation)
- Exercices : 68,69,70,72p87 (dérivation)
- Exercices : 29p84, 78p87 (parité)

III. Une limite particulière

⊗ **Activité** : 3p77 (hors salle info, utiliser les calculatrices pour obtenir des tableaux de valeurs)

Propriété | On admet la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Une manière de voir cette limite est qu'elle est égale au nombre dérivé de la fonction sinus en 0, donc $\sin'(0) = \cos(0) = 1$.

► Exercices : 31,32p85

► Exercices : 88,90p88

IV. Inéquations trigonométriques

⊗ **Activité** : 4p77 (deux méthodes de résolution : avec la courbe ou avec le cercle)

► Exercices : 93,94p88

► Exercices : 99,100p89

► Exercices : 107,108,109,110p89 (étude de fonctions)

V. Notation exponentielle

Nous avons défini, dans le chapitre des nombres complexe, pour tout réel θ , $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.
On a alors :

Propriété | Pour tout réel θ :

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

Puis :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

La notation exponentielle et les formules qui lui sont applicables permettent de démontrer les formules suivantes :

$$\cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \quad \text{et} \quad \sin(\theta + \theta') = \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'$$

$$\cos(\theta - \theta') = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \quad \text{et} \quad \sin(\theta - \theta') = \sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta'$$

Qui impliquent :

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$