

Équations et inéquations



Rappels

Une équation d'inconnue x est une égalité entre expressions contenant un nombre inconnu x . On appelle **membre** de l'équation chacune des deux expressions situées de part et d'autre du signe d'égalité. Résoudre une équation d'inconnue x , c'est chercher l'ensemble des valeurs de x qui rendent l'égalité vraie. La méthode principale consiste à isoler l'inconnue x pour en déduire sa valeur. Pour cela, on applique à chaque étape des **opérations** (addition, soustraction, division, etc.) **identiques dans les deux membres de l'équation**.

De manière générale, une équation du premier degré est de la forme : $ax + b = a'x + b'$.

- on fait en sorte que l'inconnue n'apparaisse que dans l'un des deux membres de l'équation ; autrement dit on « rassemble » les x . On obtient alors une équation de la forme : $cx + b = b'$.
- on fait ensuite en sorte que les constantes isolées apparaissent dans l'autre membre de l'équation. À la fin de cette étape, l'équation ressemble alors à : $cx = d$.
- enfin on isole l'inconnue x en divisant par le coefficient (le nombre c).
- on termine en donnant l'ensemble \mathcal{S} de solutions.

Exemple Soit à résoudre l'équation $-2x + 7 = -5x + 16$:

$$\begin{aligned}
 -2x + 7 = -5x + 16 &\Leftrightarrow -2x + 7 + 5x = -5x + 16 + 5x && (+5x) \\
 &\Leftrightarrow 3x + 7 = 16 && (\text{simplification}) \\
 &\Leftrightarrow 3x + 7 - 7 = 16 - 7 && (-7) \\
 &\Leftrightarrow 3x = 9 && (\text{simplification}) \\
 &\Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{9}{3} && (\div 3) \\
 &\Leftrightarrow x = 3 && (\text{simplification})
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{3\}$.

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes, en précisant les opérations effectuées (comme dans l'exemple).

- $5x = 20$
- $6x - 3 = 5$
- $6x + 2 = x + 11$

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes (on pourra moins détailler que dans l'exercice précédent) :

- $4x = 12$
- $4x + 2 = 10$
- $5x - 4 = 16$
- $-3x = 6$
- $-3x + 2 = 14$
- $67 = 5x - 3$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

$$\bullet 4x + 5 = 2x + 9$$

$$\bullet 9x - 2 = 5x - 12$$

$$\bullet 5x - 4 = 7x + 16$$

$$\bullet 3x - 4 = x + 16$$

$$\bullet 3x - 2 = -2x + 13$$

$$\bullet 15 - 2x = 5x + 1$$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

$$\bullet 3x + \frac{5}{3} = x + 4$$

$$\bullet 4x - \frac{2}{3} = 5x - \frac{1}{4}$$

$$\bullet \frac{5}{4}x - \frac{3}{4} = 7x + \frac{1}{2}$$

$$\bullet 5x - \frac{4}{5} = 2x + 1$$

$$\bullet \frac{3}{2}x - 2 = -2x + \frac{1}{3}$$

$$\bullet \frac{1}{5} - \frac{2}{3}x = 5x + 1$$

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes (commencer par développer) :

$$\bullet 4(2x - 1) = -2(x + 5)$$

$$\bullet 3(2x - 4) = 2(3x - 6)$$

$$\bullet 5 \left(4x - \frac{2}{3} \right) = -2(5x - 4)$$

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes (on pourra commencer par multiplier par les dénominateurs) :

$$\bullet \frac{3x + 5}{2} = \frac{x + 4}{5}$$

$$\bullet x + \frac{4}{5} = \frac{3x + 8}{10}$$

$$\bullet \frac{1}{5} - \frac{2}{3}x = \frac{5x + 1}{3}$$

Méthode Pour la résolution d'une **inéquation** on fait de même que pour une équation, en ajoutant la règle : **multiplier ou diviser par un nombre négatif fait changer le sens de l'inégalité**.

Il faut donc bien réfléchir à chaque fois à l'opération que l'on effectue.

L'ensemble de solutions d'une inéquation est généralement un **intervalle**.

Exemples

$$\begin{aligned} -2x \geq 4 &\Leftrightarrow x \leq \frac{4}{-2} && (\div (-2) < 0) \\ &\Leftrightarrow x \leq -2 && \text{et } \mathcal{S} =]-\infty; -2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x > 40 &\Leftrightarrow x > \frac{40}{5} && (\div 5 > 0) \\ &\Leftrightarrow x > 8 && \text{et } \mathcal{S} =]8; +\infty[\end{aligned}$$

Exercice 7

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\bullet -3x \leq -6$$

$$\bullet 3 > 5x + 8$$

$$\bullet 7 \leq -3x - 5$$

Exercice 8

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\bullet 3x - 4 \geq x + 16$$

$$\bullet 3x - 2 \leq -2x + 13$$

$$\bullet 15 - 2x \geq 5x + 1$$

$$\bullet 9x - 2 < 5x - 12$$

$$\bullet 5x - 4 < 7x + 16$$

$$\bullet \frac{3}{5}x + 2 > \frac{1}{3}x + 5$$