Fonctions

∽

Exercice 1
Voici un tableau de variations :

x	-3		-1		1		3
variations de f	$-0{,}3$	↘	$-0{,}5$	↗	$0{,}5$	↘	$0{,}3$

1. Après avoir choisi des unités adaptées, dessiner une représentation graphique possible de la fonction f dans un repère orthogonal avec 2 cm (ou carreaux) pour une unité en abscisse.
2. (a) Quel est le maximum de f sur $[-3;3]$? En quelle valeur est-il atteint ?
   (b) Quel est le minimum de f sur $[-3;3]$? En quelle valeur est-il atteint ?
3. (a) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ possède-t-elle ?
   (b) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0{,}4$ possède-t-elle ?
   (c) Pour quelles valeurs de k l'équation $f(x) = k$ n'a-t-elle qu'une solution ?
4. (a) Une élève affirme que $f(-2) < 0$. A-t-elle raison ? Expliquer.
   (b) Un élève affirme que $f(0{,}5) > 0$. A-t-il raison ? Expliquer.

Exercice 2
On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = x^3 - 3x \qquad h(x) = x - 3$$

1. Compléter les cases blanches du tableau suivant (penser à utiliser la calculatrice) :

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3	$3{,}5$	4
$f(x)$			4	$1{,}75$								$1{,}75$	4
$g(x)$	-2	$1{,}12$							2				
$h(x)$	-5												1

2. Tracer, dans un même repère, les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ des fonctions f, g et h sur $[-2;4]$. On utilisera :
   - 2 cm (ou carreaux) pour une unité en abscisse (de -2 à 4) ;
   - 1 cm (ou carreau) pour une unité en ordonnée (de -5 à 5) ;
   - Une couleur différente par courbe, sans oublier de les nommer.
3. À l'aide du graphique, déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$.
4. Comparaison des fonctions f et g.
   (a) À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :

i. Combien y a-t-il de points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$?

ii. Quelles sont leurs coordonnées ?

(b) Pour avoir plus de précision, on se propose de retrouver ces résultats par calcul :

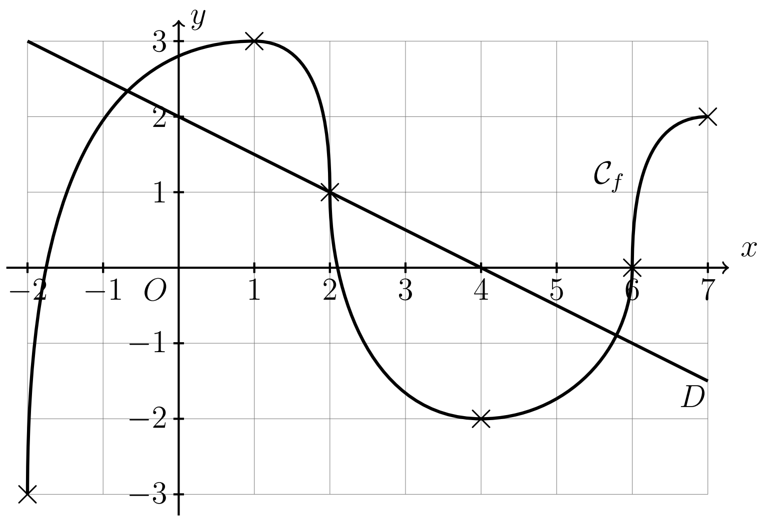
i. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

ii. En déduire, par calcul, les coordonnées des points A et B d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

(c) Sur quel(s) intervalle(s) a-t-on $f(x) \leqslant g(x)$? (méthode libre)

Exercice 3

Ci-dessous on a tracé une droite D et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-2; 7]$.



1. La droite D est la courbe représentative de la fonction g définie par :
   (entourer la bonne réponse)

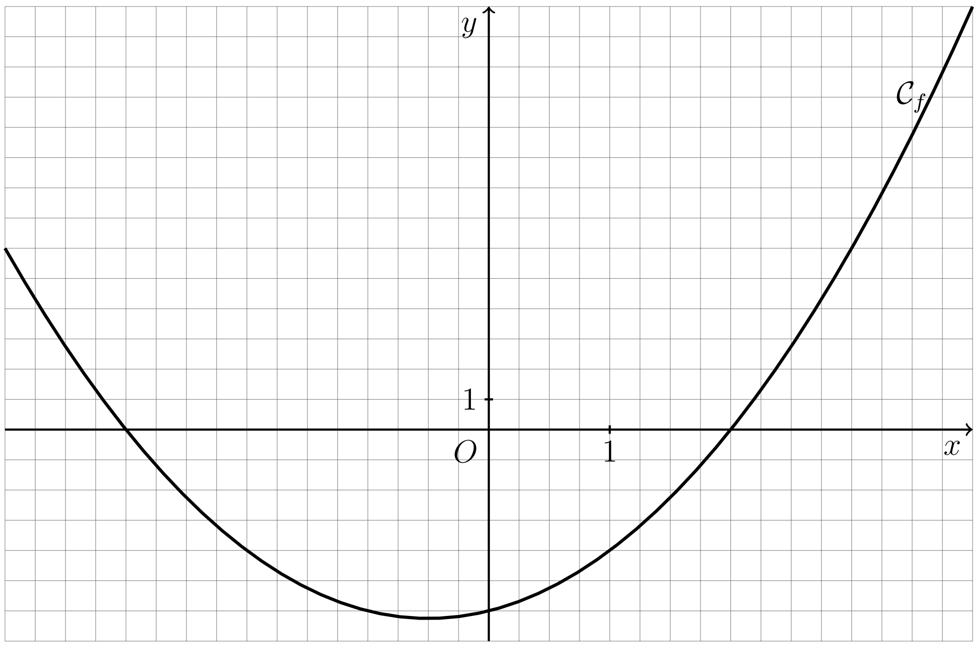
$$g(x) = 2x - 4 \qquad g(x) = -2x + 2 \qquad g(x) = \frac{1}{2}x - 2 \qquad g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

2. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

	AFFIRMATIONS	vrai ou faux
1	L'image de -2 par la fonction f est 4	
2	Le nombre 7 est un antécédent du nombre 2 par la fonction f	
3	$f(1) = 3$	
4	Le nombre 2 a trois antécédents par la fonction f	
5	L'équation $f(x) = 1$ possède 3 solutions dans l'intervalle $[-2; 4]$	
6	L'équation $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ possède 3 solutions dans $[-2; 7]$	
9	Si $k \in]2; 3[$, alors l'équation $f(x) = k$ a deux solutions	
7	La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1; 2]$	
8	La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1; 4]$	
10	La fonction f est négative sur l'intervalle $[4; 6]$	
11	La fonction f est positive sur l'intervalle $[-1{,}5; -0{,}5]$	

Exercice 4

On considère la fonction f dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est la suivante :



1. En faisant apparaître les traits de construction, utiliser le graphique pour :
   (a) Donner les images de 0, de 2 et de -1.
   (b) Donner les antécédents éventuels de -7 et -4.
   (c) Résoudre l'équation $f(x) = 6$.
2. On donne maintenant l'expression de la fonction : $f(x) = x^2 + x - 6$.
   (a) Vérifier par calcul que les résultats donnés aux questions précédentes sont corrects.
   (b) i. Démontrer que $f(x) = (x-2)(x+3)$.
   ii. Résoudre alors par calcul l'équation $f(x) = 0$.
   (c) i. Démontrer que $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}$.
   ii. Justifier alors que quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant -\dfrac{25}{4}$.

Exercice 5

1. Tracer, dans un même repère, les droites représentant les fonctions affines f, g et h suivantes :

$$f(x) = x \qquad g(x) = 8 \qquad h(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

2. (a) Calculer l'image de 4 par la fonction h.
   (b) Déterminer le nombre qui a pour image 12 par la fonction h.
   (c) Résoudre l'équation $h(x) = g(x)$, tout d'abord graphiquement puis par calcul.
3. À l'aide du graphique, chercher un nombre x tel que $h(x) < g(x) < f(x)$.
   Vérifier par calcul.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

1. Démontrer que $f(x) = (2x-1)^2$.
2. En utilisant la question précédente, déterminer les antécédents éventuels de 9 par f.