LYCÉE ALFRED KASTLER **2nde**

2016–2017

Devoir commun de mathématiques

Corrigé

Exercice 1

Partie A

1.c : $\dfrac{1}{3}$ 2.d : $\dfrac{2}{3}$ 3.d : $y = -2$ 4.a : $y = -0{,}5x + 2{,}5$ 5.b : $x = -4$

Partie B

1. Les droites (d_1) et (CD) sont parallèles, donc elles ont le même coefficient directeur et $(d_1)\ :\ y = \dfrac{2}{3}x + b$.

   La droite (d_1) passe par $B(3;1)$ donc $1 = \dfrac{2}{3} \times 3 + b$, d'où $b = -1$.

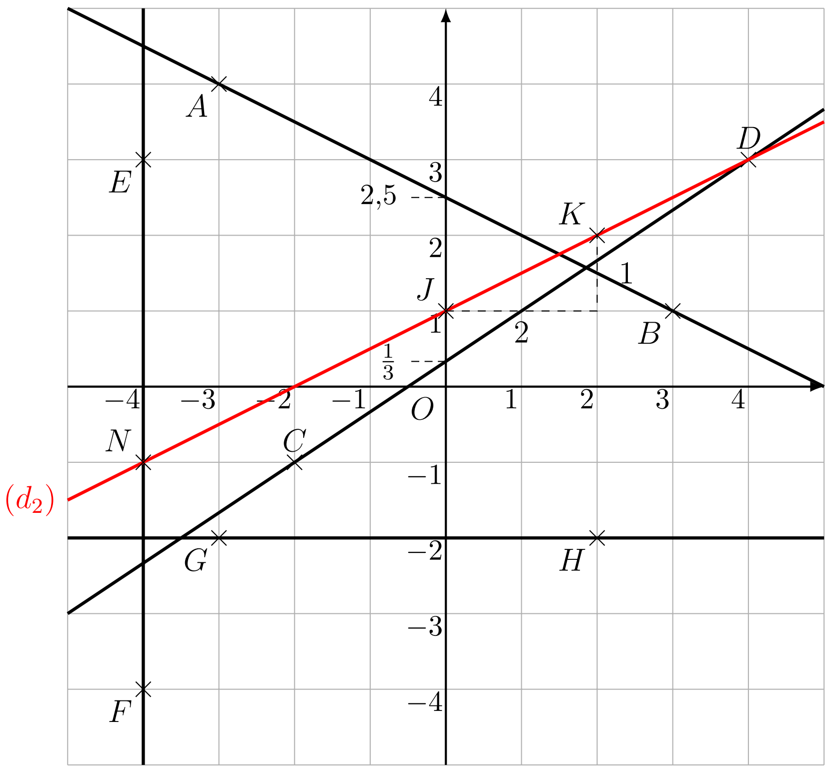
   Donc $(d_1)\ :\ y = \dfrac{2}{3}x - 1$.

2. (d_2) a pour équation $y = 0{,}5x + 1$.

   En remplaçant x par 0 on obtient $y = 1$, et pour $x = 2$ on obtient $y = 2$.

   Ainsi (d_2) passe par les points $J(0;1)$ et $K(2;2)$.

   On peut aussi utiliser l'ordonnée à l'origine (1) et le coefficient directeur ($0{,}5 = \frac{1}{2}$).



3. En remplaçant x par (-4) dans l'équation de (d_2) on trouve :

   $y = 0{,}5 \times (-4) + 1 = -2 + 1 = -1$, donc $N(-4;-1)$ est un point de la droite (d_2).

Exercice 2

1. La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
2. (a) $f(1) = -3 \times 1 + 5 = 2$ donc l'image de 1 par f est 2.

   (b) On cherche x tel que $f(x) = 1 \Leftrightarrow -3x + 5 = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{-15}{-3} = 2$.

   L'antécédent de -1 par f est 2.

3. Les points $A(-3{,}5;-1)$ et $B(2;4{,}5)$ appartiennent à $\mathcal{C}_g$ (coordonnées de la forme $(x;f(x))$).
4. g est une fonction affine, donc $g(x) = ax + b$.
   $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{f(2) - f(-3{,}5)}{2 - (-3{,}5)} = \dfrac{4{,}5 - (-1)}{2 - (-3{,}5)} = \dfrac{5{,}5}{5{,}5} = 1$ donc $g(x) = x + b$.
   Par suite, $B \in \mathcal{C}_g$ donc $4{,}5 = 2 + b$ puis $b = 2{,}5$.
   Finalement, $g(x) = x + 2{,}5$ ou $\mathcal{C}_g \;:\; y = x + 2{,}5$.
5. $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont des coefficient directeurs différents (-3 et 1) donc elles sont sécantes.
   On résout :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow -3x + 5 = x + \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow 5 - \frac{5}{2} = x + 3x \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{2} = 4x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

   Par suite, $g\left(\dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{5}{8} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{25}{8}$.
   Le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$ est donc le point $C\left(\dfrac{5}{8};\dfrac{25}{8}\right)$.

Exercice 3

1. Calcul de la moyenne : $\frac{46\times3+48\times8+49\times12+50\times17+51\times12+52\times4+53\times1}{57} \simeq 49{,}7$ (arrondi au dixième).
   La taille moyenne des nouveau-nés est donc de 49,7 cm.
2. (a) Pour déterminer la médiane, on établit les effectifs cumulés croissants :

Taille	46	48	49	50	51	52	53
E.C.C.	3	11	23	40	52	56	57

   Il y a 57 valeurs et $57 \div 2 = 28{,}5$. La médiane est donc la 29$^{\text{ème}}$ valeur, soit Me $= 50$.
   (b) La moitié des nouveaux nés mesurent au plus 50 cm.
3. Il y a 23 nouveaux nés qui mesurent 49 cm ou moins.
   $23 \div 57 \times 100 = 40{,}4$ (arrondi au dixième)
   Il y a donc 40,4% des nouveaux nés qui mesurent 49 cm ou moins.
4. (a) $57 \times 3 \div 4 = 42{,}75$.
   D'après les effectifs cumulés croissants, la 43$^{\text{ème}}$ valeur est 51, donc $t = 51$ cm.
   (b) C'est le troisème quartile (Q_3) qui a été trouvé.

Exercice 4

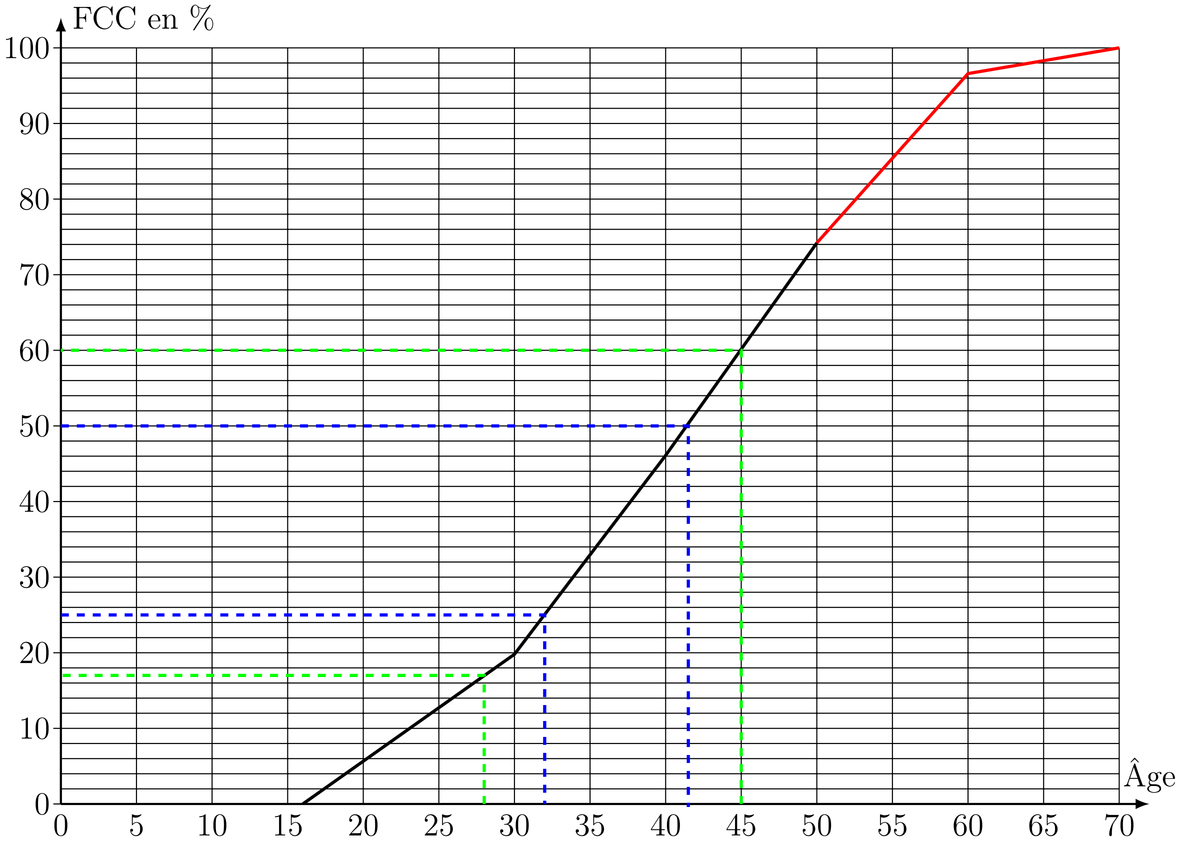
1. (a) La population étudiée est les salariés français de 16 à 70 ans en 2008.
   (b) Le caractère étudié est leur âge.
2. Pour calculer la moyenne, on utilise le centre des classes :

Âge	[16 ;30[	[30 ;40[	[40 ;50[	[50 ;60[	[60 ;70[
centre de la classe	23	35	45	55	65
Fréquence (en %)	19,8	26,3	28,1	22,4	3,4

   D'où le calcul de la moyenne : $\frac{23\times19{,}8+35\times26{,}3+45\times28{,}1+55\times22{,}4+65\times3{,}4}{100} = 40{,}934$.
   La moyenne de la série est donc de 40,9 ans (arrondi au dixième).
3. (a) Calcul des fréquences cumulées croissantes :

Âge	[16 ;30[	[30 ;40[	[40 ;50[	[50 ;60[	[60 ;70[
Fréquence (en %)	19,8	26,3	28,1	22,4	3,4
F.C.C.	19,8	46,1	72,4	96,6	100

(b) D'où la courbe :

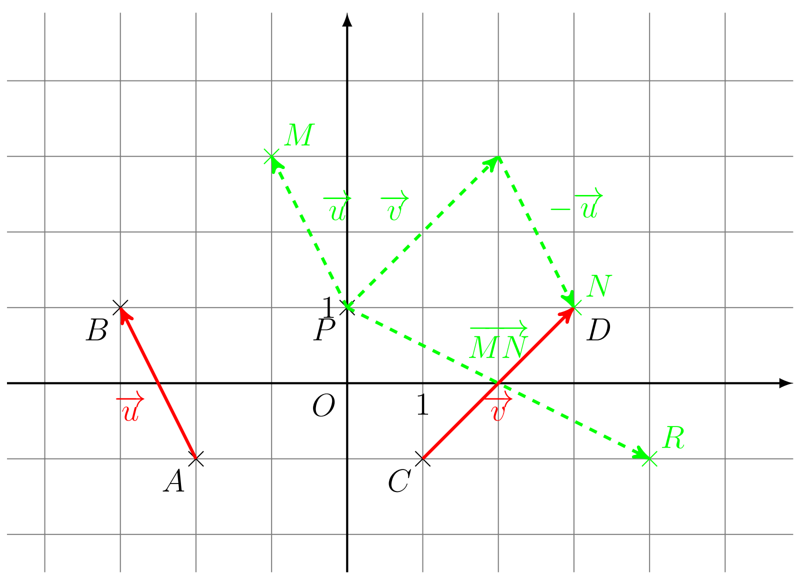


(c) Par lecture graphique sur la courbe (pointillés bleus) : Me $= 41$ ans et $Q_1 = 32$ ans.

(d) D'après lecture sur le graphique (pointillés verts), on a :
F.C.C. à 28 ans : 17% F.C.C. à 45 ans : 60% 60-17=43
Il y a donc 43% de salariés entre 28 et 45 ans.

Exercice 5

1.

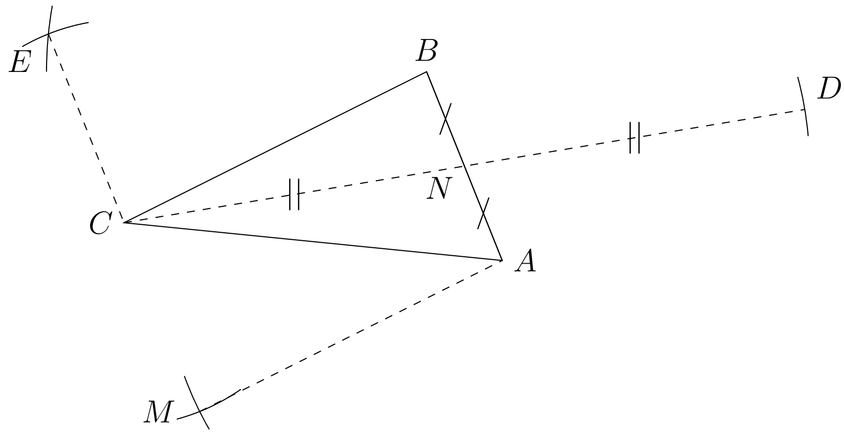


2. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3-(-2))^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

3. I est le milieu de $[CD]$ donc $x_I = \dfrac{x_C + x_D}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $y_I = \dfrac{y_C + y_D}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0$.
   Donc $C(2;0)$.
4. Sur la figure (en rouge).
5. Sur la figure (en vert).
6. On sait que $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{MN}$, donc $PRNM$ est un parallélogramme. On a donc $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{RN}$.

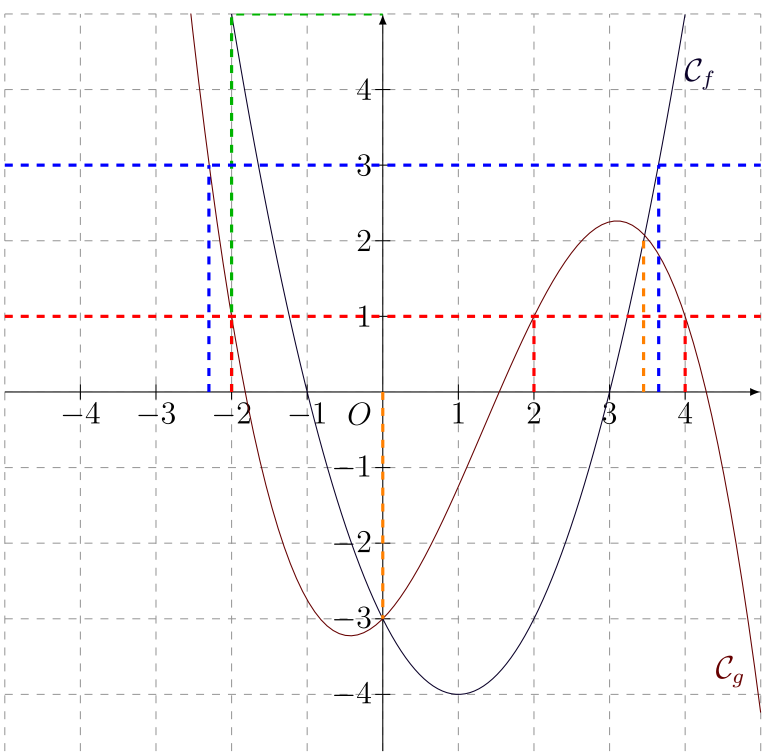
Exercice 6

1.



2. Comme $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$, d'après la règle du parallélogramme $CADB$ est un parallélogramme.
3. (a) On a $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ d'après la relation de Chasles.
   Donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$.
   (b) Comme $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$, on peut affirmer que $ACEB$ est un parallélogramme.
4. On sait que $ACEB$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CA}$.
   De même, $CADB$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$.
   En conclusion, par les égalités de vecteurs, on a bien $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{EB}$.

Exercice 7



1. Par lecture graphique (traits verts), l'image de -2 par la fonction f est 5.
2. Par lecture graphique (traits bleus) le nombre d'antécédents de 3 par f est 2.
3. Par lecture graphique :
   (a) $g(x) = 1 \Rightarrow x \in \{-2; 2; 4\}$ (traits rouges).
   (b) $f(x) = g(x) \Rightarrow x \in \{0; 3{,}5\}$ (traits oranges).
4.

x	-2		1		4
variations de f	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5

ou

x	$-\infty$		1		$+\infty$
variations de f		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

5. Il suffit de calculer : $f(-2) = ((-2) - 1)^2 - 4 = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$.
   On retrouve bien le résultat de la première question.

Exercice 8

1. La fonction h est définie sur $[-2; 3]$.
2. Par lecture du tableau, l'image de 3 par la fonction h est -2 : $h(3) = -2$.
3. Par lecture du tableau, l'antécédent de 3 par la fonction h est 1 : $h(1) = 3$.
4. Par lecture du tableau, le minimum de h est -2 (il est atteint en $x = 3$).
5. Le nombre 0,4 appartient à $[0; 1]$, et comme la fonction h est croissante sur $[0; 1]$, on a :

$$0 < 0{,}4 < 1 \Rightarrow h(0) < h(0{,}4) < h(1) \Rightarrow 2 < h(0{,}4) < 3$$

6. Une représentation de la fonction h possible :