**LYCÉE ALFRED KASTLER** **2nde**

**2016–2017**

Devoir surveillé n°8 – mathématiques

Correction

## Exercice 1

1. L'expression de $f$ étant de la forme $ax^2 + bx + c$, $f$ est une fonction polynomiale de degré 2, donc sa courbe représentative est une parabole.
2. L'abscisse du sommet est $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2 \times (-1)} = 1$.
   L'ordonnée du sommet est alors :
   $g(1) = -1^2 + 2 \times 1 - 4 = -1 + 2 - 4 = -3$ (le signe « $-$ » devant $1^2$ n'est pas dans le carré !).
   De plus, $a = -1 < 0$ donc les branches sont dirigées vers le bas.
   Les variations de la fonction $g$ sont alors :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| variations de $g$ | | $\nearrow$ | $-3$ | $\searrow$ | |

3. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 2x^2 + 3x - 14 - (-x^2 + 2x - 4) \qquad \text{(attention aux parenthèses !)} \\ &= 2x^2 + 3x - 14 + x^2 - 2x + 4 \\ &= 3x^2 + x - 10 \end{aligned}$$

   Ensuite,

$$\begin{aligned} (3x - 5)(x + 2) &= 3x \times x + 3x \times 2 - 5 \times x - 5 \times 2 \\ &= 3x^2 + 6x - 5x - 10 \\ &= 3x^2 + x - 10 \end{aligned}$$

   Ainsi on a bien $f(x) - g(x) = (3x - 5)(x + 2)$.

4. On étudie le signe de $3x - 5$ : $3x - 5 > 0 \Leftrightarrow 3x > 5 \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{3}$.
   Puis le signe de $x + 2$ : $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.
   On obtient alors le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $\frac{5}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x - 5$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x + 2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(3x-5)(x+2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

5. D'après le tableau de signe, l'inéquation $(3x - 5)(x + 2) \leqslant 0$ a pour solution $\mathcal{S} = \left[-2; \dfrac{5}{3}\right]$.
6. Il s'agit des solutions de l'inéquation $f(x) - g(x) < 0$, donc de $f(x) < g(x)$. Autrement dit cela indique les valeurs de $x$ pour lesquelles la courbe représentative de $f$ est située au dessous de celle de $g$.

**Exercice 2**

1. On a $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, donc $\overrightarrow{AB}(6-2; 4-(-1))$, doit $\overrightarrow{AB}(4; 5)$.
   De même, on trouve $\overrightarrow{BC}(-11; -3)$.
   Par suite, $-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-4 + 2 \times (-11); -5 + 2 \times (-3))$,
   c'est à dire $(-4 - 22; -5 - 6)$, soit $(-26, -11)$.
2. On sait d'après la question précédente que $\overrightarrow{BV}(-26; -11)$. Or $\overrightarrow{BV}(x_V - 6; y_V - 4)$ donc : $x_V - 6 = -26$ et $y_V - 4 = -11$. Ainsi, $x_V = -26 + 6 = -20$ et $y_V = -11 + 4 = -7$.
   Le point $V$ a donc pour coordonnées $(-20; -7)$.
3. Avec $\overrightarrow{v}(7; 3)$ et $\overrightarrow{BV}(-26, -11)$ on calcule :
   $x'y - xy' = 7 \times (-11) - (-26) \times 3 = -77 + 78 = 1 \neq 0$.
   On en conclut que $\overrightarrow{v}(7; 3)$ et $\overrightarrow{BV}$ ne sont pas colinéaires.

**Exercice 3**

1. $h(x)$ n'est pas définie si le dénominateur $x + 4$ est nul, donc si $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.
   Ainsi, $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.
2. On a $h(x) = 5 - \dfrac{22}{x+4} = \dfrac{5(x+4)}{x+4} - \dfrac{22}{x+4} = \dfrac{5x + 20 - 22}{x+4} = \dfrac{5x-2}{x+4}$.
3. On a d'après la question précédente $h(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x-2}{x+4} > 0$.
   On étudie le signe de $5x - 2$ : $5x - 2 > 0 \Leftrightarrow 5x > 2 \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{5}$.
   Puis le signe de $x + 4$ : $x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$.
   Ainsi on obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $\frac{2}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5x - 2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x + 4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{5x-2}{x+4}$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

   Alors l'inéquation $h(x) > 0$ a pour solutions $\mathcal{S} = ]-\infty; -4[ \cup ]\frac{2}{5}; +\infty[$.