Chapitre :
Fonctions

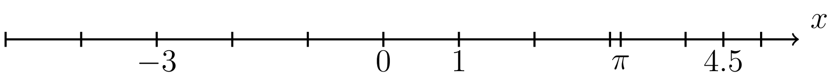
∽

I. Généralités

1. Intervalles

Définition L'ensemble de tous les nombres (entiers, décimaux, rationnels, irrationnels) est appelé ensemble des nombres réels et est noté $\mathbb{R}$.

On le représente souvent à l'aide d'une droite graduée.

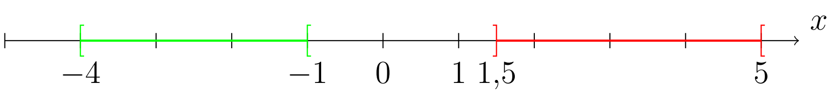


Définition Un intervalle est un ensemble de nombres réels. Il y a plusieurs types d'intervalles, mais ils ont tous en commun pour leur notation deux valeurs, un nombre ou l'infini (∞), que l'on appelle les bornes de l'intervalle, et deux crochets.
Soit a et b deux nombres réels.

- L'intervalle $]a;b[$ est un intervalle **ouvert**, ensemble de tous les nombres réels x tels que $a < x < b$ (a et b sont exclus).
- L'intervalle $[a;b]$ est un intervalle **fermé**, ensemble de tous les nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ (a et b sont inclus).
- On définit de manière similaire des intervalles comme $[a;b[$ ou $]a;b]$ (dits semi-ouverts).
- L'intervalle $]a;+\infty[$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x > a$.
- L'intervalle $]-\infty;b]$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x \leqslant b$.

Le sens des crochets permet de signifier que le nombre est **compris** dans l'intervalle ou **exclu** de l'intervalle.

L'infini est toujours exclu : ce n'est pas un nombre réel, un nombre réel ne vaut jamais l'infini.



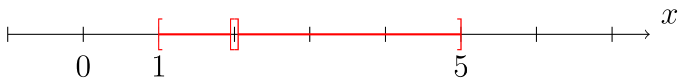
Représentation des intervalles
$[-4;-1[$ (semi-ouvert) et $]1{,}5;5[$ (ouvert).
On a $\pi \in]1{,}5;5[$ car $1{,}5 < \pi < 5$, $-4 \in [-4;-1[$ mais $-1 \notin [-4;-1[$.

Voir page 27

▶ **Exercices :** 1,2,3,4p27

Définition L'union de deux intervalles est l'ensemble des nombres qui sont au moins dans l'un des deux intervalles. On utilise la notation $\cup$ pour faire l'union de deux intervalles, on la prononce « union ».

Exemple $[1;2[\cup]2;5]$ est l'ensemble des nombres x tels que $1 \leqslant x \leqslant 5$ et $x \neq 2$.



2. Fonctions

a. Vocabulaire

Définition Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ (le plus souvent un intervalle ou une union d'intervalles). Définir une fonction f c'est associer à tout nombre x de $\mathcal{D}$ un **unique** nombre réel $f(x)$.
On dit que $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de f, on le note parfois $\mathcal{D}_f$.
On dit que $f(x)$ est l'**image** de x. Pour tout x de $\mathcal{D}$, l'image de x est donc unique.

Exemple On peut définir une fonction à l'aide d'une expression littérale (qui utilise la lettre x, appelée variable). Soit par exemple f, la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. C'est la fonction qui à tout nombre positif associe sa racine carrée.

On note $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
L'image de 4 par la fonction f est $f(4) = \sqrt{4} = 2$.

▶ **Exercices :** 9,10,11p29

Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. Soit y un nombre réel. Un **antécédent** de y pour la fonction f est un nombre x tel que $f(x) = y$.

Remarque Un antécédent est un « x » (alors que l'image est un « y » ou « $f(x)$ »).

Méthode Chercher un antécédent revient à chercher un « x », et par suite à résoudre une équation.

Exemple Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Chercher un antécédent de 4 par f c'est chercher les nombres x tels que $f(x) = 4$. On remplace $f(x)$ par son expression, puis on résout cette équation.
On a $f(2) = 4$ et $f(-2) = 4$. Ainsi, 2 et -2 sont tous les deux des antécédents de 4.
Le nombre -4 n'a pas d'antécédent par f car pour tout nombre réel, $f(x) = x^2 \geqslant 0$.

Remarque l'image d'un nombre est unique, mais un nombre peut avoir aucun, un seul ou plusieurs antécédents.

▶ **Exercices :** 15,16p31

b. Représentation graphique

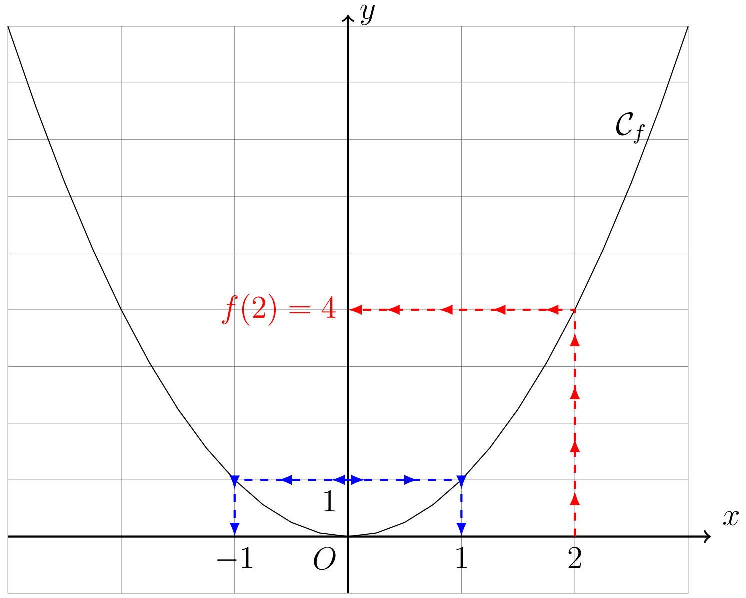
Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. La représentation graphique de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ pour tout x de $\mathcal{D}$. On note parfois $\mathscr{C}$ ou $\mathscr{C}_f$ cette courbe. On associe cette courbe à l'équation $y = f(x)$ (y est l'ordonnée, x l'abscisse).

Pour construire une représentation graphique d'une fonction f, il faut calculer l'image $f(x)$ de plusieurs nombres x de $\mathcal{D}$.

Exemple Représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[-3;3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Exemple de calcul : $f(-3) = (-3)^2 = 9$.
Représentation et lectures graphiques :



2 a pour image 4 par f : $f(2) = 4$.
1 a pour antécédents -1 et -1 par f : $f(-1) = f(1) = 1$.

Une lecture graphique des images (et des antécédents) ne donne que des valeurs approchées.

▶ **Exercices :** 6,7,8p28-29 (images)

▶ **Exercices :** 14,17,19p31 (antécédents)

▶ **Exercices :** 70,71p45 (détermination de points sur une courbe)

▶ **Exercice :** 72p45 (tracé de courbe avec la calculatrice) : voir page 270 ou 272 selon le modèle.

▶ **Exercice :** 63p44 (ensemble de définition)

★ **Approfondissement :** 66 (logique), 67 (problème) p44

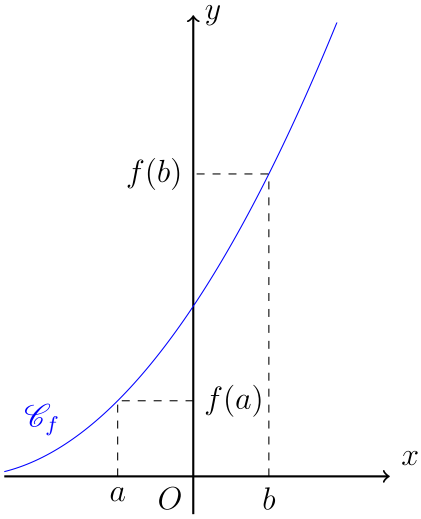
II. Variations de fonctions

⊛ **Activité :** 1p23

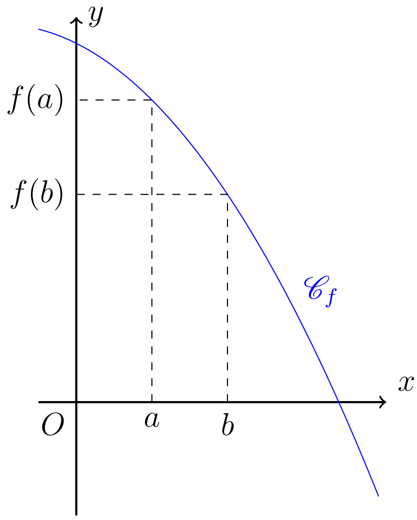
Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est croissante sur I si quels que soient a et b dans I tels que $a < b$ on a $f(a) \leq f(b)$.
- On dit que f est décroissante sur I si quels que soient a et b dans I tels que $a < b$ on a $f(a) \geq f(b)$.

Autrement dit, une fonction croissante conserve le sens de l'inégalité, alors qu'une fonction décroissante change le sens de l'inégalité.



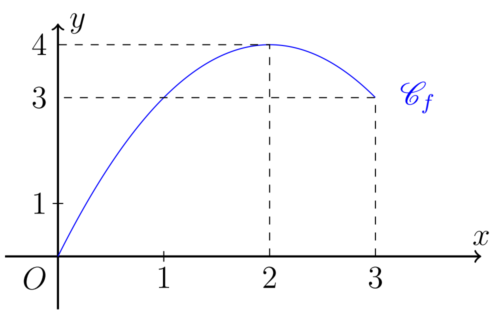
Fonction croissante
$a < b$ et $f(a) \leqslant f(b)$



Fonction décroissante
$a < b$ et $f(a) \geqslant f(b)$

Si les inégalités entre les images de $f(a)$ et $f(b)$ sont toujours strictes, on dit que f est strictement croissante (ou décroissante).
On peut indiquer les intervalles sur lesquels une fonction est croissante ou décroissante à l'aide d'un tableau de variations.

x	0	2	3
variations de f	0 ↗	4	↘ 3



► **Exercices :** 26,27,28,29p35

► **Exercices :** 31,32p36
On observe alors sur la courbe ou le tableau des valeurs remarquables qui peuvent correspondre à des maximums (ou maxima) ou à des minimums (ou minima).
Un extremum (maximum ou minimum) est une valeur atteinte par la fonction. Ainsi

Définition $f(a)$ est un maximum (resp. minimum) de f sur I si $f(a)$ est la plus grande (resp. petite) valeur de f sur I, c'est à dire que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(a) \leq f(x)$).

Exemple valeurs maximales de l'exemple précédent.

▶ **Exercices :** 34,35,36,37p38

▶ **Exercices :** 41,42p39 (retour à la définition générale de variation), éventuellement 43p39

III. Fonctions de référence

1. Fonctions affines et linéaires

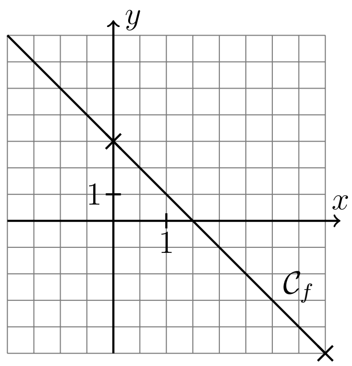
⊛ **Activité :** page 52

Définition Une fonction affine est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

Lorsque $b = 0$, f est une fonction **linéaire** ($f(x) = ax$).
Lorsque $a = 0$, f est une fonction **constante** ($f(x) = b$).

Propriété La fonction affine f est représentée par une droite.
On note que la droite a pour équation $y = ax + b$.
(Autrement dit, l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées satisfont l'équation est une droite)

Exemple Soit $f : x \longmapsto -2x + 3$.
Pour tracer la courbe représentative de f, qui est une droite puisque f est une fonction affine, il suffit de déterminer deux points de cette droite.
Pour cela, on choisit deux valeurs de x, puis on détermine les images $y = f(x)$. Par exemple :
Si $x = 0$, on a $f(0) = 3$, donc on obtient le point de coordonnées $(0; 3)$.
Si $x = 4$, on a $f(4) = -2 \times 4 + 3 = -8 + 3 = -5$, on obtient donc le point de coordonnées $(4; -5)$.
On place alors les deux points dans un repère, puis la droite passant par ces deux points.



Exemple Soit $g : x \longmapsto \dfrac{-2x + 5}{4}$.
La fonction g est affine. En effet, $g(x) = \dfrac{-2}{4}x + \dfrac{5}{4} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{4}$.

► **Exercices :** 22,23p61 (simplification puis représentation)

Propriété Soit $f : x \longmapsto ax + b$.

- Si $a > 0$, alors f est croissante.
- Si $a < 0$, alors f est décroissante.

Démonstration : Dans le cas où $a > 0$:
Soit u et v deux réels tels que $u < v$. Pour prouver que f est croissante, il suffit de prouver que $f(u) < f(v)$ (voir la définition vue en début d'année).
Or $f(u) < f(v) \Leftrightarrow f(u) - f(v) < 0$.
Calculons alors : $f(u) - f(v) = (au + b) - (av + b) = au + b - av - b = au - av = a(u - v)$
Or, comme $u < v$, on a $u - v < 0$. On a supposé de plus que $a > 0$. Par conséquent, le produit $a(u - v)$ est négatif d'après la règle des signes d'un produit.
Autrement dit, $f(u) - f(v) < 0$: f est bien croissante.
Pour le cas où $a < 0$: la Démonstration est tout à fait similaire sauf qu'il faut prouver cette fois que $f(u) > f(v)$ (une fonction décroissante change le sens de l'inégalité). Cette fois, $a(u - v)$ est positif car c'est le produit de deux nombres négatifs.

Exemple La fonction f vue plus haut est décroissante car $a = -2 < 0$.

▶ **Exercices :** 48,49p62 (variations)

Méthode Pour étudier le signe d'une expression affine, on peut commencer par résoudre une inéquation.
Par exemple, soit $f(x) = -3x + 7$. On résout :

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\Leftrightarrow -2x + 7 > 0 \\ &\Leftrightarrow -2x > -7 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{-7}{-2} && (-2 < 0 \text{ donc on change le sens}) \\ &\Leftrightarrow x < \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x)$ est positive (+) quand $x < \dfrac{7}{2}$. On a alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$-2x + 7$		$+$	0	$-$	

▶ **Exercices :** 6,9p56 (signe d'une expression affine)

▶ **Exercices :** 44,45p62 (représentation et inéquations)

▶ **Exercices :** (?) 1,3p55 (inéquations algébriquement et graphiquement)

▶ **Exercices :** 28 (à résoudre ensemble),30,31p61 (déterminer $f(x)$ connaissant deux images)

Nous avons vu précédemment que la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est la droite d'équation $y = ax + b$.

Définitions Le nombre a est appelé **coefficient directeur**.
Le nombre b est l'**ordonnée à l'origine** puisque $f(0) = b$.

Cependant, toutes les droites n'ont pas une équation de la forme $y = ax + b$.

Propriété Toute droite du plan a une équation de la forme :

- soit $y = ax + b$ où a et b sont des réels ;
- soit $x = c$, où c est un réel.

Dans le second cas, la droite est parallèle à l'axe des ordonnées (ensemble des points d'abscisse c).

Propriété Soit $f : x \mapsto ax + b$. Alors quels que soient u et v distincts dans $\mathbb{R}$, le taux de variation de f entre u et v vaut toujours a. Autrement dit,

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = a$$

Démonstration : On exprime la différence : $f(v) - f(u) = (av + b) - (au + b) = av + b - au - b = au - av = a(v - u)$. Comme u et v sont distincts, $v - u \neq 0$. On peut donc diviser par $(v - u)$, ce qui donne bien : $\dfrac{f(v) - f(u)}{v - u} = a$

Le fait que le taux de variation soit constant n'est vrai que pour une fonction affine.
Cela a pour conséquence la propriété suivante :

Propriété Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $y = ax + b$.
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts de $\mathcal{D}$. Alors :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = a$$

Cette formule permet alors de déterminer le coefficient directeur d'une droite passant par deux points donnés. On peut alors déterminer une équation de la droite.

Exemple Soit $A(-2; 1)$ et $B(4; 2)$. On veut déterminer l'équation de la droite (AB).
Comme $x_A \neq x_B$, l'équation n'est pas de la forme $x = c$, mais de la forme $y = ax + b$.
D'après la propriété, $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2 - 1}{4 - (-2)} = \dfrac{1}{6}$.
Ainsi, l'équation de (AB) est de la forme $y = \dfrac{1}{6}x + b$.
Pour déterminer b, on utilise le fait que $B \in (AB)$. Ainsi, les coordonnées de B satisfont l'équation :

$$\begin{aligned} y_B = \frac{1}{6}x_B + b &\Leftrightarrow 2 = \frac{1}{6} \times 4 + b \\ &\Leftrightarrow 2 = \frac{4}{6} + b \\ &\Leftrightarrow 2 = \frac{2}{3} + b \\ &\Leftrightarrow b = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Finalement, $(AB) : y = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{4}{3}$

▶ **Exercice :** 43p62 (interprétation graphique de a ; chercher graphiquement $f(x) = ax + b$)

▶ **Exercices :** 11,13 p191

▶ **Exercice :** 16p192 (tracer une droite étant donné un point et le coefficient directeur)

Propriété Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

- Les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $a = a'$.
- Les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes si et seulement si $a \neq a'$.

▶ **Exercice :** 17p193

Méthode Pour démontrer que trois points A, B et C sont alignés, on peut chercher à démontrer que (AB) et (AC) sont parallèles. Dans ce cas, comme elles ont un point commun (le point A), alors elles sont nécessairement confondues, et les points A, B et C sont bien alignés.

Exemple Soit $A(6;0)$, $B(0;4)$ et $C(3;2)$.
Le coefficient directeur de (AB) est : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{4-0}{0-6} = -\dfrac{2}{3}$.
Celui de (AC) est : $\dfrac{y_c - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{2-0}{3-6} = -\dfrac{2}{3}$.
Les coefficients directeurs sont égaux, donc (AB) et (AC) sont parallèles, et A, B et C sont alignés.

▶ **Exercices :** 20,21p194

▶ **Exercices :** 24,25,26p195 (droites sécantes, recherche du point d'intersection)

★ **Approfondissement :** 61p201, 64p202

2. Fonction carré

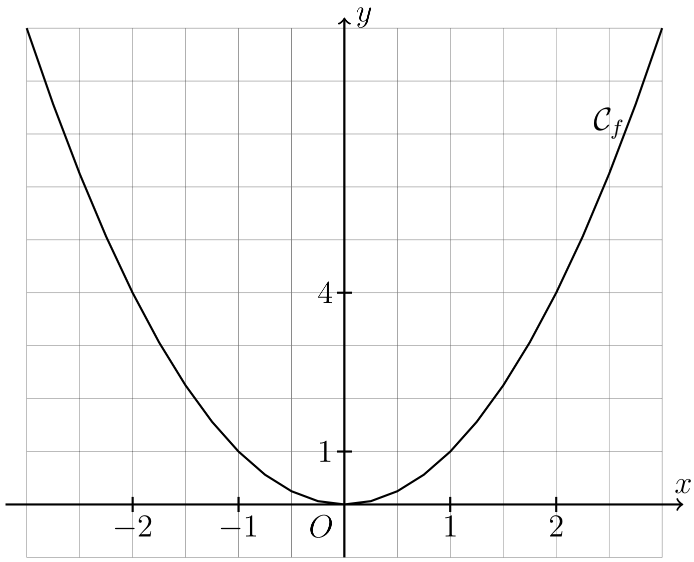
⊛ **Activité :** page 66 (manipulation d'expressions avec le carré)

Définition La fonction carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Propriété La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ puis strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet pour minimum 0 en $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



Démonstration : Prouvons que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Soit donc a et b deux réels positifs tels que $a < b$. On a $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Or, $a - b < 0$ (car $a < b$) et $(a + b) > 0$ (car a et b sont positifs). Donc $a^2 - b^2 < 0$, c'est à dire $a^2 < b^2$. Ainsi la fonction carré respecte l'ordre sur $[0; +\infty[$, autrement dit elle est croissante sur $[0; +\infty[$.
Sur $]-\infty; 0]$: exercice

Définition On appelle **parabole** la courbe représentative de la fonction carré. Son extremum est appelé le **sommet** de la parabole.

Remarque La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, parce que $f(-x) = f(x)$, autrement dit les points $(-x; x^2)$ et $(x; x^2)$ qui sont sur la courbe sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

▶ **Exercices :** 17,18,19,20p72 (comparaison de carrés)

▶ **Exercices :** 23,27p73 (comparaisons un peu plus poussées)

▶ **Exercices :** 29,30p74 (résolution graphique d'inéquations avec les carrés)

3. Fonction inverse

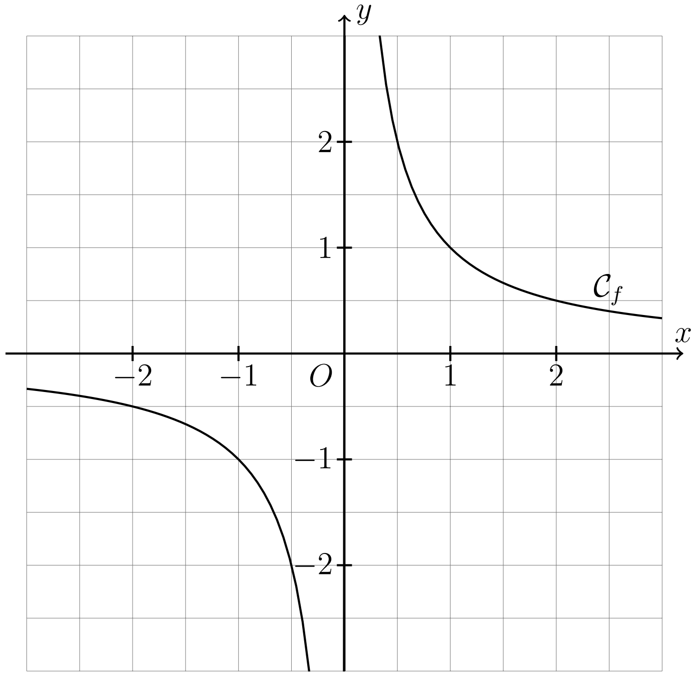
Définition La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^\star =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$ et encore décroissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration : Exercice.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de f	$\searrow$	||	$\searrow$

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$



Définition On appelle la courbe représentative de la fonction inverse une **hyperbole**.

Remarque La courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère. En effet, $f(-x) = -f(x)$, donc les points $\left(-x;-\dfrac{1}{x}\right)$ et $\left(x;\dfrac{1}{x}\right)$ sont sur la courbe et sont symétriques par rapport à O.

▶ **Exercice :** 1p91

▶ **Exercices :** 5,6p95 (comparaisons)

▶ **Exercices :** 9,10p96 (encadrements)

▶ **Exercices :** 15,16,17p97 (résolutions graphiques d'inéquations)

★ **Approfondissement :** 52p104 (trois fonctions)

IV. Fonctions polynomiales de degré 2

1. Définition, variations

⊛ **Activité :** 1p67 (trajectoire d'un objet lancé, parabole sur calculatrice)

Définition Une fonction polynomiale de degré 2 est une fonction f dont l'expression peut s'écrire sous la forme :

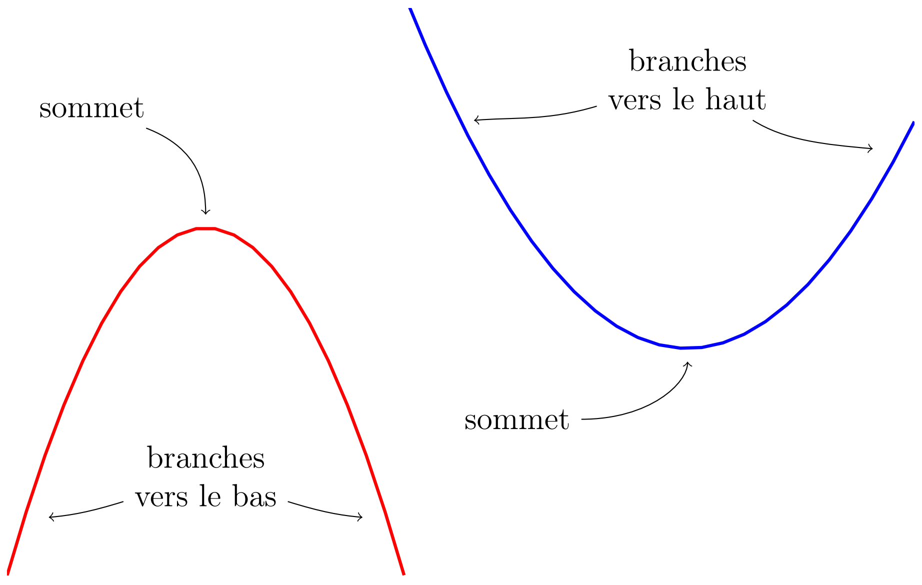
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des nombres fixés, a étant non nul.

Exemples

- $f(x) = -2(x+5)(x-2) = -2(x^2 - 2x + 5x - 10) = -2(x^2 + 3x - 10) = -2x^2 - 6x + 20$. Alors $a = -2$, $b = -6$ et $c = 20$.
- $g(x) = 3(x-1)^2 + 2 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3x^2 - 6x + 3$. Alors $a = 3$, $b = -6$ et $c = 3$.
- la fonction carré est une fonction polynomiale de degré 2.

Définition De même que la fonction carré, la courbe représentative d'une fonction polynomiale de degré 2 est appelée **parabole**, formée de deux **branches** et d'un sommet.



Propriété

Le sommet de la parabole a pour abscisse $x = \dfrac{-b}{2a}$.

- Si $a > 0$, les branches de la parabole sont vers le haut.
- Si $a < 0$, les branches de la parabole sont vers le bas.

Démonstration : Ceci est admis et ne sera démontré qu'en première.

Exemple

- On peut établir le tableau de variations de f :

  Le sommet a pour abscisse $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2 \times (-2)} = \dfrac{6}{-4} = -\dfrac{3}{2}$.

  $a = -2 < 0$ donc les branches sont dirigées vers le bas.

  Ainsi :

x	$-\infty$	$-\dfrac{3}{2}$	$+\infty$
variations de f	$\nearrow$	$\dfrac{49}{2}$	$\searrow$

  Calcul de l'ordonnée du sommet (utiliser l'expression de f qui paraît la mieux adaptée) :
  $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -2\left(-\dfrac{3}{2}+5\right)\left(-\dfrac{3}{2}-2\right) = -2 \times \left(\dfrac{7}{2}\right) \times \left(-\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{49}{2}$.

- De même pour g :

  Le sommet a pour abscisse $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2 \times 3} = \dfrac{6}{6} = 1$.

  $a = 3 > 0$ donc les branches sont dirigées vers le haut.

  Ainsi :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
variations de g	$\searrow$	2	$\nearrow$

  Calcul de l'ordonnée du sommet : $g(1) = 3(1-1)^2 + 2 = 2$ (utiliser la forme la plus adaptée).

On peut observer une symétrie de la courbe par rapport à la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le sommet, autrement dit la droite d'équation $x = \dfrac{-b}{2a}$.

▶ **Exercices :** 39 à 42p77

▶ **Exercices :** 84,85,86p83

2. Problèmes du second degré

a. Développer, factoriser

Rappel

- Développer, c'est transformer un produit en somme ;
- Factoriser, c'est transformer une somme en produit.

Méthode Pour développer ou factoriser on peut utiliser (a, b, c et k désignent des nombres réels) :

- la distributivité de la multiplication sur l'addition : $k(a+b) = ka + kb$

- les identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

▶ **Exercices :** 1,2,5,6p70 (développer)

▶ **Exercices :** 8,11,12p71 (factoriser)

b. Équations produit

Propriété **(Règle du produit nul)**
Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
Autrement dit : Soient A et B deux réels. $A \times B = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$

▶ **Exercices :** première question de chaque exercice suivant : 35,36,37,38p76

c. Signe d'un produit

Méthode

- Pour étudier le signe d'un produit, on étudie le signe de chacun des facteurs.
- Pour étudier le signe d'une expression affine, on peut résoudre une inéquation

Exemple Étudions le signe de $(x-3)(-2x+4)$ sur $\mathbb{R}$.
On résout : $x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 3$ et $-2x+4 \geqslant 0 \Leftrightarrow -2x \geqslant -4 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{-4}{-2}\ (-2<0) \Leftrightarrow x \leqslant 2$.
Par suite :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
signe de $x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $-2x+4$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $(x-3)(-2x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut alors résoudre des inéquations comme : $(x-3)(-2x+4) \geqslant 0$.
D'après le tableau de signes, on peut affirmer que $\mathcal{S} = [2;3]$.

▶ **Exercices :** deuxième question de chaque exercice suivant : 35,36,37,38p76

V. Fonctions homographiques

1. Définitions

⊛ **Activité :** 2p91 (recherche d'une longueur revenant à étudier des fonctions homographiques)

Définition On appelle fonction homographique toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

où a, b, c et d sont des constantes, avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

Remarque la seconde condition revient à dire que le numérateur n'est pas proportionnel au dénominateur (et donc que $f(x)$ ne peut pas être simplifiée en une constante).

Exemple $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}$; $g(x) = \dfrac{4-x}{x}$

Exemple la fonction inverse est une fonction homographique.

Propriété La fonction homographique est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{-d}{c} \right\}$.

Démonstration : Il faut en effet que $cx + d \neq 0$, donc que $x \neq -\dfrac{d}{c}$.

Exemple Donner l'ensemble de définition de f et de g.

Définition De même que pour la fonction inverse, la courbe représentative d'une fonction homographique est une hyperbole.

Les variations d'une telle fonction ne sont, en seconde, pas à connaître.

▶ **Exercice :** 70p45

▶ **Exercices :** 41,38p103 (ensemble de définition, manipulation d'expressions)

▶ **Exercices :** 18,19,21p98, 55p104 (équations)

2. Signe d'un quotient et inéquations

Méthode Le signe d'un quotient s'étudie de la même manière que celui d'un produit.

Exemple Étudier le signe de $\dfrac{-4x+6}{x-1}$:

- Signe de $-4x+6$:

$$\begin{aligned} -4x+6 > 0 &\Leftrightarrow -4x > -6 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{-6}{-4} && (-4<0) \\ &\Leftrightarrow x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

- Signe de $x-1$: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

Ainsi :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-4x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-4x+6}{x-1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Le double trait indique que la valeur de $x=1$, qui annule le dénominateur, est interdite.

Exemple Résoudre $\dfrac{2}{x-1}<4$.
On se ramène à l'étude d'un signe :

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-1}<4 &\Leftrightarrow \frac{2}{x-1}-4<0\\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x-1}-\frac{4(x-1)}{x-1}<0\\ &\Leftrightarrow \frac{2-4(x-1)}{x-1}<0\\ &\Leftrightarrow \frac{2-4x+4}{x-1}<0\\ &\Leftrightarrow \frac{-4x+6}{x-1}<0\end{aligned}$$

Or nous avons étudié le signe de $\dfrac{-4x+6}{x-1}$ dans l'exemple précédent.
On en déduit alors que $\mathcal{S}=]-\infty;1[\cup\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.

On ne peut pas utiliser le produit en croix comme pour les équations (en tout cas pas simplement).
En effet, en faisant cela :

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-1}<4 &\Leftrightarrow 2<4(x-1)\\ &\Leftrightarrow 2<4x-4\\ &\Leftrightarrow 6<4x\\ &\Leftrightarrow \frac{6}{4}<x\\ &\Leftrightarrow x>\frac{3}{2}\end{aligned}$$

On ne trouve qu'une partie des solutions : $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$, parce que $(x-1)$ n'est pas forcément positif !

▶ **Exercices :** 22,25,26p99

▶ **Exercices :** 58,59,63p105