Chapitre :
Vecteurs

∽

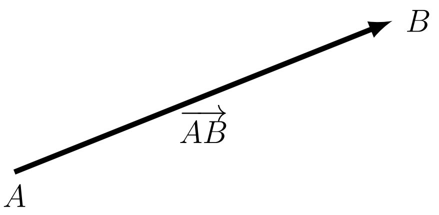
⊛ **Activité :** 3,4p224 (parallélogrammes)

⊛ **Activité :** 1p225 (translation et introduction des vecteurs)

I. Définitions

Définition Soit A et B deux points du plan. La notation $\overrightarrow{AB}$ se dit « vecteur AB ». Il est représenté par une flèche. On dit que A est l'origine et que B est l'extrémité. Un vecteur est caractérisé par trois choses :

- Sa direction, c'est à dire celle de la droite (AB) ;
- Son sens, celui de A vers B ;
- Sa longueur, celle de $[AB]$, à savoir AB.



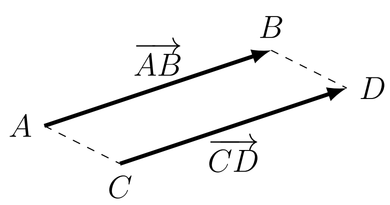
Définition Si $A = B$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$. Ce vecteur particulier est appelé vecteur nul ; on le note $\overrightarrow{0}$.

Définition On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

- les directions sont les mêmes, c'est à dire $(AB)//(CD)$;
- les sens sont les mêmes (le sens de A vers B est le même que le sens de C vers D) ;
- les longueurs sont les mêmes, c'est à dire $AB = CD$

De manière équivalente :

Propriété **(Règle du parallèlogramme 1)**
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

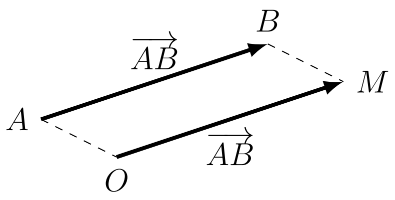


⚠ L'ordre des points est très important !

Remarque Quand on a un parallélogramme, on peut alors en déduire plusieurs égalités de vecteurs. Dans le cas de $ABDC$, commme sur la figure ci-dessus, on a en particulier aussi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Propriété Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur et O un point. Il existe **un unique** point M tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$.

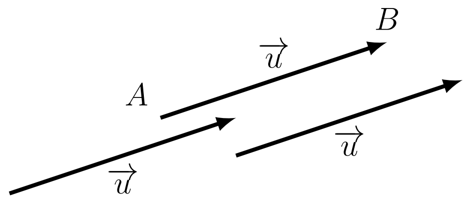
C'est le point M tel que $ABMO$ est un parallélogramme :



On peut dire aussi que M est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Remarque Il est important de noter que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, l'objet $\overrightarrow{AB}$ est le même objet que $\overrightarrow{CD}$, bien que les points A et B ne soient pas les points C et D.

On peut nommer un vecteur par une seule lettre (minuscule) surmontée d'une flèche.
Par exemple $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$.
On peut alors représenter un vecteur à plusieurs endroits du plan, il s'agit toujours du même objet.

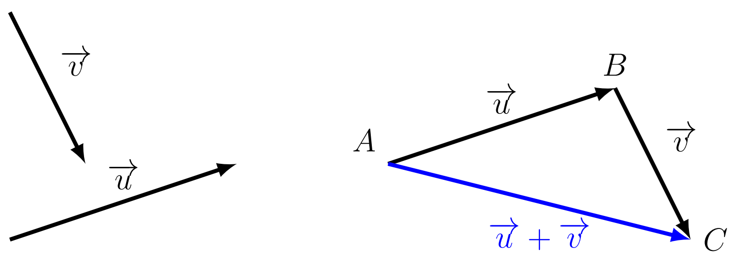


▶ **Exercices :** 1,2,4p231 (utilisent l'opposé d'un vecteur, à définir à l'oral/au tableau)

II. Somme de vecteurs

Pour faire la somme de deux vecteurs, on représente ces deux vecteurs de manière que l'origine de l'un soit l'extrémité de l'autre. La somme est alors le vecteur dont l'origine est l'origine du premier et l'extrémité est l'extrémité du second.

Méthode Pour faire la somme de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
On choisit un point A.
On contruit le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
On construit ensuite le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$.
Alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Propriété **(Relation de Chasles)** Soit A, B et C trois points du plan. Alors :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

c'est la **relation de Chasles**.

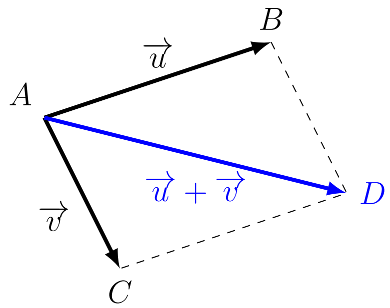
Bien faire attention à avoir le même point entourant un signe $+$ pour appliquer cette relation. Ça ne fonctionne en particulier pas avec un signe $-$.

Parfois, on souhaite faire la somme de deux vecteurs qui ont la même origine, c'est à dire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Il s'agit alors d'une autre propriété :

Propriété **(règle du parallélogramme 2)** Pour tous points A, B et C du plan,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.

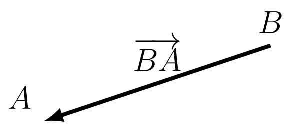


Démonstration : Comme $ABDC$ est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ d'après la règle du parallélogramme 1, et donc, en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

Définition En remarquant que quelque soit A et B, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$, on dit que $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AB}$. On le note aussi $-\overrightarrow{AB}$. On a donc $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

On écrit alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.



Remarque
Avec la règle du parallélogramme 2, on peut remarquer que quelque soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :

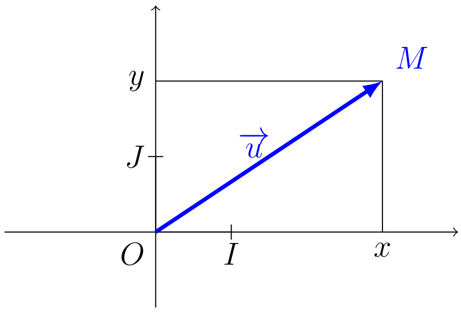
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$$

▶ **Exercices :** 5,6p 232 et 43,44p241 (construction)

▶ **Exercices :** 7,8p232 et 46,48,49p241 (simplification, démonstration), éventuellement 50p241

III. Coordonnées

Définition Dans un repère $(O; I; J)$, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont celles du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.



Exemple le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ a pour coordonnées $(0; 0)$.

On note $\overrightarrow{u}(x; y)$ pour désigner le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(x; y)$. On peut aussi noter :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

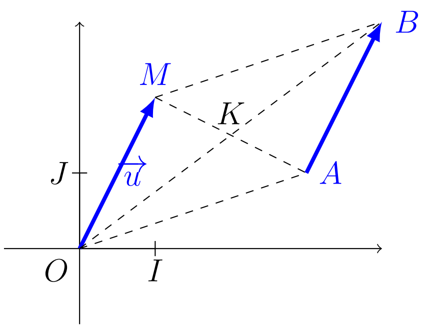
Propriété Les vecteurs $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y')$ sont égaux si et seulement si

$$x = x' \text{ et } y = y'$$

Théorème Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans le repère $(O; I; J)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

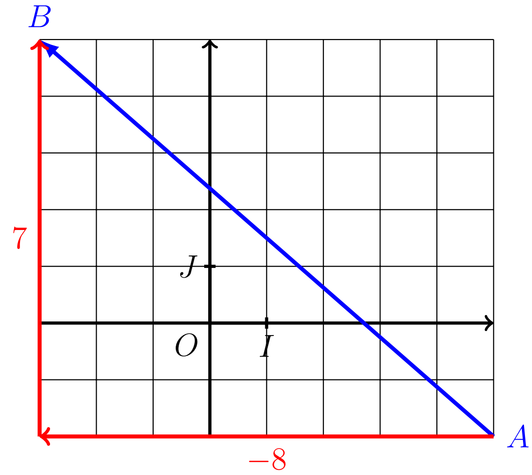
Démonstration : Soit M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Les coordonnées de M sont celles de $\overrightarrow{AB}$ par définition. De plus, $OMBA$ est un parallélogramme. Donc $[AM]$ et $[OB]$ ont le même milieu K.



Donc $x_K = \dfrac{x_M + x_A}{2} = \dfrac{x_B + x_O}{2} \Leftrightarrow x_M + x_A = x_B \Leftrightarrow x_M = x_B - x_A$.
On fait de même avec les ordonnées.

Exemple Si $A(5; -2)$ et $B(-3; 5)$, alors $\overrightarrow{AB}(-3 - 5; 5 - (-2))$, soit $\overrightarrow{AB}(-8; 7)$.

Remarque On peut « lire » les coordonnées des vecteurs sur un repère, en les comprenant comme le déplacement à faire pour aller de l'origine à l'extrémité, selon l'axe des abscisses puis selon celui des ordonnées.

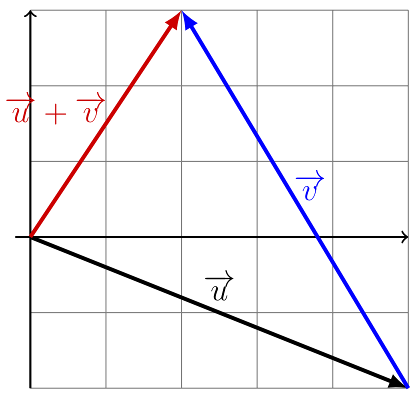


▶ **Exercices :** 17,13,14,16p234

Théorème Soit $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$. Alors $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y')$.

Démonstration : Admis

Exemple Soit $\overrightarrow{u}(5;-2)$ et $\overrightarrow{v}(-3;5)$, et $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$. Alors $\overrightarrow{w}(2;3)$.



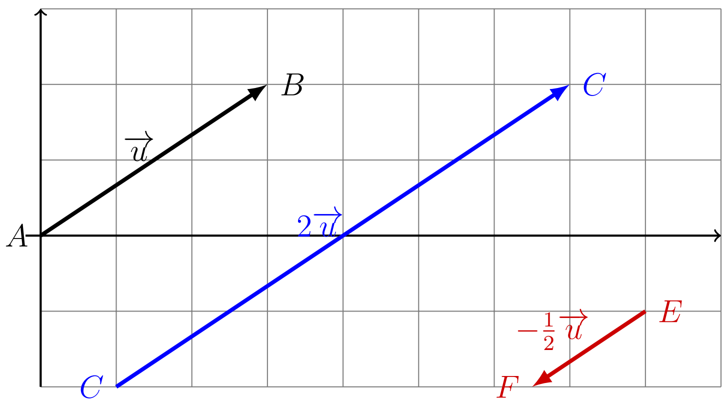
Remarque On a $-\overrightarrow{u}(-x;-v)$ (car $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$)

▶ **Exercice :** 15p234,74p243

IV. Produit par un nombre réel ; colinéarité

Définition Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées $(x;y)$ et k un réel.
On note $k\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(kx;ky)$.

Exemple Soit $\overrightarrow{v}(3;2)$. Alors $2\overrightarrow{v}(2\times 3;2\times 2)$, soit $2\overrightarrow{v}(6;4)$. De même, $-\frac{1}{2}\overrightarrow{v}\left(-\frac{3}{2};1\right)$.



Graphiquement, Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul, k un réel non nul.
Notons $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$. Alors (CD) et (AB) sont parallèles et :

- Si $k>0$, alors $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens et $CD=kAB$
- Si $k<0$, alors $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire et $CD=-kAB$

▶ **Exercices :** 9,10,11p233

Propriété On a les règles de calcul suivantes :

$$k(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=k\overrightarrow{u}+k\overrightarrow{v}$$

$$(k+k')\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{u}+k'\overrightarrow{u}$$

$$k(k'\overrightarrow{u})=(kk')\overrightarrow{u}$$

▶ **Exercices :** 18,19,20,21p235

Définition On dit que deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction, autrement dit si les droites qu'ils portent sont parallèles.

Nous avons vu que si $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction, donc ils sont colinéaires.
Nous admettrons la réciproque, et donc le théorème suivant :

Théorème $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que

$$\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$$

Remarque On peut prouver que deux droites sont parallèles en prouvant que deux vecteurs sont colinéaires.

Autre conséquence importante :

Propriété Soit A, B et C trois points du plan.
A, B et C sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Propriété Soit $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Démonstration : Cela vient du fait que les coordonnées sont colinéaires. En effet, il existe k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$, autrement dit

$$x' = kx \text{ et } y' = ky$$

Donc (dans le cas où x et y ne sont pas nuls) $k = \dfrac{x'}{x} = \dfrac{y'}{y}$, et par produit en croix :

$$x'y = xy' \Leftrightarrow xy' - yx' = 0$$

Si jamais $y = 0$ (resp. $x = 0$), alors $y' = 0$ (resp. $y = 0$) et donc $xy' - yx'$ vaut bien 0.

▶ **Exercices :** 26,27,28,31p237

▶ **Exercices :** 65,66p242