Chapitre : Probabilités

∽

⊛ **Activité :** page 144
(En DM donné par anticipation) Faire jeter exactement trente fois deux dés et compter le nombre de fois où leur somme est inférieure ou égale à 3.

I. Généralités

Définition Une expérience aléatoire est un processus qui peut être répété, dont le résultat n'est pas connu à l'avance, mais dont l'ensemble des résultats possibles est connu.
l'ensemble de résultats possibles, appelé **univers**, est parfois noté E. On appelle **issue** un résultat possible.

Exemple On lance un dé et on regarde le résultat. L'univers est l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Exemple On lance deux dés et on fait la somme. L'univers est l'ensemble $\{2; 3; \dots; 12\}$.

Définition On appelle événement tout sous-ensemble (partie) de l'univers E. Un **événement élémentaire** est un événement composé d'une seule issue. On peut décrire un événement à l'aide d'une phrase.

Exemple Dans l'expérience aléatoire du jet d'un dé, on peut considérer :

- l'événement « obtenir un 2 ». Il correspond à l'ensemble $\{2\}$.
- l'événement « obtenir un nombre pair ». Il correspond à l'ensemble $A = \{2; 4; 6\}$.

Définition Soit A un événement.
L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$ et lu « non A » (ou « A barre ») est l'ensemble des issues de E qui ne sont pas dans A.

Exemple L'événement contraire de « obtenir un 2 » est « ne pas obtenir de 2 ».
Il correspond à l'ensemble $\{1; 3; 4; 5; 6\}$.
L'événement contraire de « obtenir un nombre pair » est « obtenir un nombre impair ».
Il correspond à l'ensemble $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$.

Définition On dit de deux événements qu'ils sont **incompatibles** s'ils n'ont pas d'issue en commun. Deux événements contraires sont donc en particulier incompatibles.

Exemple Les événements « obtenir un 2 » et « obtenir un nombre impair » sont incompatibles.

▶ **Exercices :** 34,35,36p159

II. Loi de probabilité

Sur l'ensemble $E = \{e_1; \dots; e_n\}$, univers de l'expérience aléatoire, on veut pouvoir exprimer la fréquence d'apparition de chaque issue.
On définit alors sur E une fonction de probabilité, notée P, de sorte que :
Pour tout élément e_i de E, $P(e_i) \geq 0$ et la somme des $P(e_i)$ vaut 1 :

$$P(e_1) + \cdots + P(e_n) = 1$$

Déterminer la fonction P, c'est donner la **loi de probabilité** sur E.

Définition La probabilité d'un événement A de E est la somme des probabilités des issues de A.

Exemple La probabilité d'obtenir un nombre pair avec un jet de dé à six faces est :

$$P(\text{« obtenir un nombre pair »}) = P(2) + P(4) + P(6)$$

▶ **Exercices :** 1,2p149, 3p150

Cas particulier : équiprobabilité

Dans certains cas, on estime que les probabilités de toutes les issues sont les mêmes. On dit que les issues sont **équiprobables**. C'est le cas lorsque l'on considère que le dé est « **équilibré** », ou bien que l'on tire (une carte, une boule dans une urne) « **au hasard** ».
On dit alors que la loi est **équirépartie**.
Si l'univers E contient n éléments, on a toute issue e a la probabilité $P(e) = \dfrac{1}{n}$.

Exemple pour revenir à l'exemple précédent, si le dé est équilibré, la loi est équirépartie. Donc :

$$P(\text{« obtenir un nombre pair »}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Propriété On peut simplifier le calcul des probabilités dans le cas d'équiprobabilité. Soit A un événement de E dont la loi est équirépartie. Alors :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E}$$

Exemple Dans notre exemple, l'événement « obtenir un nombre pair » représente l'ensemble $\{2; 4; 6\}$ qui contient 3 éléments. L'ensemble E contient lui 6 éléments.
On a donc $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Propriété Soit A un événement de E. Alors :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

▶ **Exercices :** 4,5,6,7,8p151

▶ **Exercices :** 10,11,12p153,... (arbres)

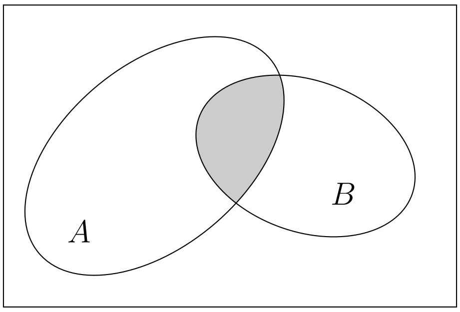
III. Lien entre union et intersection

⊛ **Activité :** 2p145 (chercher une formule liant $A \cup B$ avec A et B entre autres).

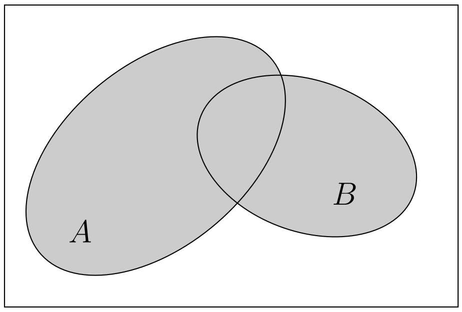
<u>Définition</u> Soit A et B deux événements. On définit les événements :

- « A et B », noté $A \cap B$ et prononcé aussi A inter(section) B, l'événement contenant les issues qui sont à la fois dans A et dans B.
- « A ou B », noté $A \cup B$ et prononcé aussi A union B, l'événement contenant les issues qui sont dans A ou dans B (éventuellement les deux).

Illustration : à l'aide d'un diagramme (dit de Venn), on peut visualiser ces deux événements.



$A \cap B$

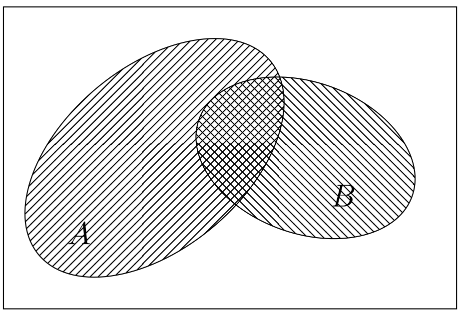


$A \cup B$

Propriété Quels que soient les événements A et B, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Preuve : Un dessin suffit à comprendre cette formule : en ajoutant $P(A)$ et $P(B)$, on compte deux fois $P(A \cap B)$, il faut donc la soustraire une fois.



▶ **Exercices :** ensemble de la page 155

▶ **Exercices :** 52,56 et 57p162

▶ **Exercice :** (DM) 58p163