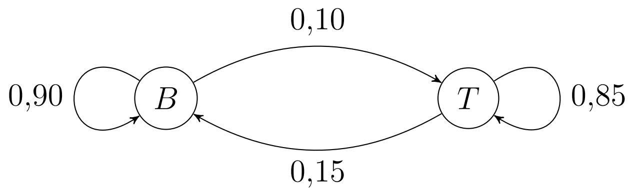
LYCÉE ALFRED KASTLER **TES spé**
2017–2018

Devoir surveillé n°5 – mathématiques
Correction

Exercice 1

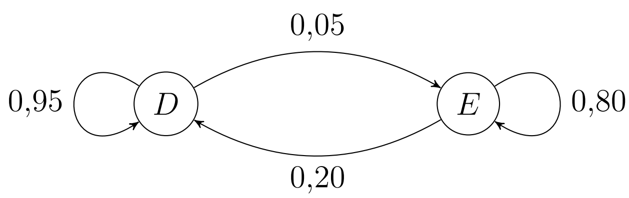
1. On représente la situation par un graphe probabiliste de sommets B et T où le sommet B représente l'état « abonné PassBus » et T l'état « abonné PassTrain » :



2. La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$.
3. L'état probabiliste initial est $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$.
   Si l'année 2016 correspond à $n = 0$, l'année 2019 correspond à $n = 3$;
   On doit calculer $P_3 = P_0 \times M^3 \simeq \begin{pmatrix} 0{,}452 & 0{,}548 \end{pmatrix}$.
   Ainsi, la part, en 2019, des abonnements PassBus dans l'ensemble des abonnements sera d'environ 45,2 %.
4. L'état stable du graphe probabiliste est représenté par la matrice $\begin{pmatrix} b & t \end{pmatrix}$ telle que
   $\begin{pmatrix} b & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}90 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$ et $b + t = 1$.
   On a alors :
   $$\begin{aligned} \begin{cases} b = 0{,}90b + 0{,}15t \\ t = 0{,}10b + 0{,}85t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}10b = 0{,}15t \\ 0{,}15t = 0{,}10b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 0{,}10b - 0{,}15t = 0 \\ &\Leftrightarrow 10b - 15t = 0 \end{aligned}$$
   On résout donc le système :
   $\begin{cases} b + t = 1 \\ 10b - 15t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10b + 10t = 10 \\ 10b - 15t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + t = 1 \\ 25t = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0{,}6 \\ t = 0{,}4 \end{cases}$
   Donc le système va se stabiliser vers la situation suivante : 60 % de PassBus et 40 % de PassTrain.

Exercice 2

1. Le graphe probabiliste :



2. La matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique est $M = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}20 & 0{,}80 \end{pmatrix}$.

3. Le premier jour, 25 % des vacanciers ont déjeuné au centre, donc $P_1 = \begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}75\end{pmatrix}$.

   $P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}75\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0{,}95 & 0{,}05\\ 0{,}20 & 0{,}80\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}3875 & 0{,}6125\end{pmatrix}$.

   38,75% des vacanciers vont déjeuner au centre le jour deuxième jour.

   $P_5 = P_1 \times M^4 \simeq \begin{pmatrix}0{,}626 & 0{,}374\end{pmatrix}$

   Ainsi 62,6% des vacanciers vont déjeuner au centre le cinquième jour.

4. $\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0{,}95 & 0{,}05\\ 0{,}20 & 0{,}80\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}575 & 0{,}425\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$.

   Cet état n'est pas stable.

5. Au bout de n jours, $P_n = \begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}75\end{pmatrix} \times M^n$. Lorsque n devient très grand et tend vers l'infini, P_n tend vers l'état stable.

   Il s'obtient en résolvant le système : $\begin{pmatrix}d & e\end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix}d & e\end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix}d & e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e & e\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0{,}95 & 0{,}05\\ 0{,}20 & 0{,}80\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}d & e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}95d + 0{,}20e & 0{,}05d + 0{,}80e\end{pmatrix}$, d'où :

   $\left\{\begin{array}{lcl} d & = & 0{,}95d + 0{,}2e \\ e & = & 0{,}05d + 0{,}8e \end{array}\right.$

   Ces deux équations se simplifient pour obtenir : $0{,}05d - 0{,}2e = 0$.

   De plus $d + e = 1$, donc le couple $(d; e)$ est solution du système : $\left\{\begin{array}{lcl} 0{,}05d - 0{,}2e & = & 0 \\ d + e & = & 1 \end{array}\right.$

   Par substitution :

   $\left\{\begin{array}{lcl} 0{,}05d - 0{,}2e & = & 0 \\ d + e & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 0{,}05d - 0{,}2(1-d) & = & 0 \\ e & = & 1 - d \end{array}\right.$

   $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 0{,}05d - 0{,}2 + 0{,}2d & = & 0 \\ e & = & 1 - d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 0{,}25d & = & 0{,}2 \\ e & = & 1 - d \end{array}\right.$

   $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} d & = & \dfrac{0{,}2}{0{,}25} = \dfrac{4}{5} \\ e & = & 1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5} \end{array}\right.$

   L'état stable du système est $P = \begin{pmatrix}\dfrac{4}{5} & \dfrac{1}{5}\end{pmatrix}$.

   Donc 80 % des vacanciers vont à terme déjeuner au centre, et non pas 75 % .

   On peut, beaucoup plus simplement, montrer que l'état probabiliste $\begin{pmatrix}0{,}75 & 0{,}25\end{pmatrix}$ n'est pas stable (de la même manière que pour la question précédente), donc que l'on ne peut pas affirmer que 75 % des vacanciers prendront leur déjeuner au centre.