Exercice 1

Partie A

1. (a)

Sommet	B	C	D	E	F	G	H
Degré du sommet	2	4	3	2	4	4	3

Le graphe a exactement 2 sommets de degré impair, il admet donc une chaîne eulérienne, mais pas de cycle eulérien. Le guide ne peut donc pas partir et revenir à l'hôtel en passant une fois et une seule par chaque chemin.

(b) Le graphe admettant une chaîne eulérienne et H étant de degré impair le guide peut emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux en partant de l'hôtel. Il arriverait alors au sommet D (l'autre sommet de degré impair). Le parcours est : H–B–G–E–F–C–D.

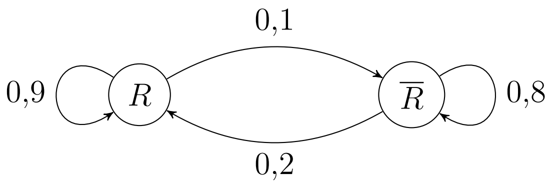
2. On utilise l'algorithme de Moore-Dijkstra en partant du sommet H :

B	C	D	E	F	G	H	Sommet sélectionné
∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	H (0)
12 (H)	20 (H)	**9 (H)**	∞	∞	∞		D (9)
12 (H)	17 (D)		∞	30 (D)	∞		B (12)
	17 (D)		∞	30 (D)	25 (B)		C (17)
			∞	28 (C)	**24 (C)**		G (24)
			33 (G)	**28 (C)**			F (28)
			31 (F)				E (31)

Le chemin le plus court pour aller de H à E fait 32 km ; c'est H–D–C–F–E.

Partie B

1. On a donc le graphe probabiliste suivant :



2. Pour ce graphe, la matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$, en respectant l'ordre R, $\overline{R}$.

3. On sait qu'en 2015 30 % des hôtels sont répertoriés, donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Donc en 2016 :

$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}41 & 0{,}59 \end{pmatrix}$.

En 2016, 41 % des hôtels seront répertoriés. En 2017 :

$P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}41 & 0{,}59 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}487 & 0{,}513 \end{pmatrix}$.

En 2017, 48,7 % des hôtels seront répertoriés.

4. Les termes de la matrice de transition n'étant pas nuls, l'état P_n converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ avec $a + b = 1$ qui vérifie $P = P \times M$ soit :

$$\left\{\begin{array}{lcr} a & = & 0{,}9a + 0{,}2b \\ a + b & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcr} 0{,}1a - 0{,}2b & = & 0 \\ a + b & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcr} a - 2b & = & 0 \\ a + b & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcr} a - 2b & = & 0 \\ 2b + b & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & \dfrac{2}{3} \\ b & = & \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

L'état stable est donc , $P = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Ainsi, à terme, deux tiers des hôtels seront répertoriés.