État stable

∽

Exercice 1 (Métropole, 21 juin 2017)
Dans un jeu vidéo, une suite d'énigmes est proposée au joueur. Ces énigmes sont classées en deux catégories : les énigmes de catégorie A sont les énigmes faciles ; les énigmes de catégorie B sont les énigmes difficiles.
Le choix des énigmes successives est aléatoire et vérifie les conditions suivantes :

- la première énigme est facile ;
- si une énigme est facile, la probabilité que la suivante soit difficile est égale à 0,15 ;
- si une énigme est difficile, la probabilité que la suivante soit facile est égale à 0,1.

Pour $n \geqslant 1$, on note :

- a_n la probabilité que l'énigme numéro n soit facile (de catégorie A) ;
- b_n la probabilité que l'énigme numéro n soit difficile (de catégorie B) ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste pour l'énigme numéro n.

1. Donner la matrice P_1.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
3. Écrire la matrice M associée à ce graphe, puis donner la matrice ligne P_2.
4. Sachant que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_n + b_n = 1$, montrer que, pour tout entier $n \geqslant l$, on a :
$$a_{n+1} = 0{,}75a_n + 0{,}1.$$
5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = a_n - 0{,}4$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$a_n = 0{,}8 \times 0{,}75^n + 0{,}4.$$
   (c) Préciser la limite de la suite (v_n).
   (d) Une revue spécialisée dans les jeux vidéo indique que plus le joueur évolue dans le jeu, plus il risque d'avoir à résoudre des énigmes difficiles. Que penser de cette analyse ?