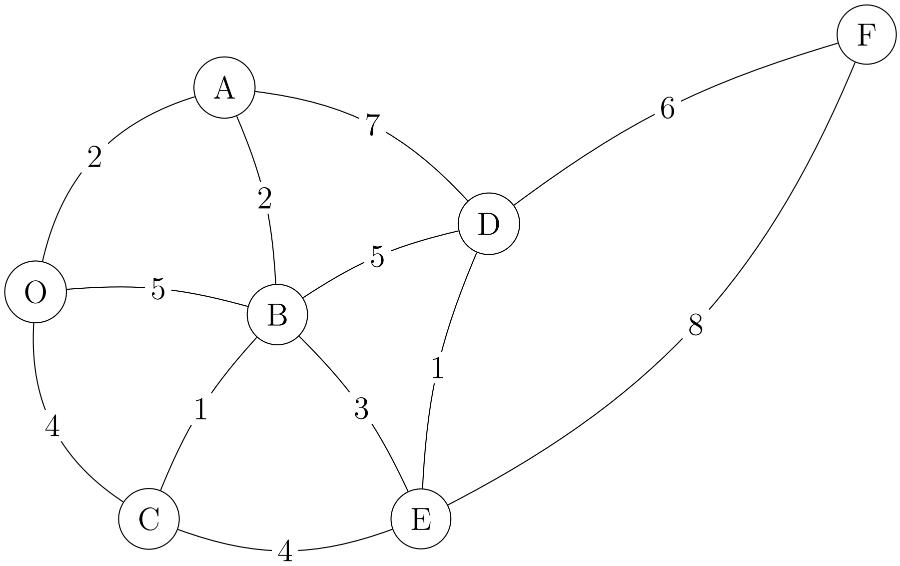
Exercice 1 (Polynésie, 16 juin 2017)
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Alex a téléchargé sur son smartphone un jeu lui permettant de combattre des animaux virtuels par localisation GPS. Le graphe pondéré représenté ci-dessous illustre le trajet qu'Alex doit suivre en marchant dans les rues de sa ville et le nombre d'animaux virtuels qu'il doit combattre sur la route suivie.



À l'aide d'un algorithme, déterminer le nombre minimal de créatures qu'Alex doit combattre s'il part du point O pour arriver au point F de la ville. Détailler les étapes de l'algorithme.

Partie B

Alex retrouve d'autres personnes, ayant le même jeu, dans le parc de la ville dans le but de comparer le nombre de créatures qu'ils ont combattues.
Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc. Le second jour, on comptait 25 personnes et le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc.
Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10. On admet que la fonction f modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le x-ième jour.

1. Traduire l'énoncé par un système de trois équations à trois inconnues a, b et c.
2. Vérifier que ce système est équivalent à l'équation $AX = B$ avec :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$$
3. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $M \times A$.
   (b) Que représente la matrice M pour la matrice A ?
4. Le parc de la ville a une capacité d'accueil de 2 500 personnes.
   Selon ce modèle, le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours ?
   Justifier la réponse.

Exercice 2 (Nouvelle-Calédonie Wallis-et-Futuna, 16 novembre 2016)

Pierre prend des cours de natation ; il effectue plusieurs plongeons.

Lorsque Pierre réussit un plongeon, il prend confiance en lui et la probabilité qu'il réussisse le plongeon suivant est de 0,7.

Par contre, lorsqu'il ne réussit pas un plongeon, la probabilité qu'il réussisse le plongeon suivant est égale à 0,2.

On suppose que Pierre a réussi son premier plongeon.

L'état « plongeon réussi » est noté R.

L'état « plongeon non réussi » est noté $\overline{R}$.

Pour tout entier naturel $n > 1$, la probabilité que Pierre réussisse son n-ième plongeon est notée a_n, tandis que la probabilité que Pierre ne réussisse pas son n-ième plongeon est notée b_n.

La matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ donne l'état probabiliste du système lors du n-ième plongeon.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets R et $\overline{R}$.
2. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe, les sommets R et $\overline{R}$ étant classés dans cet ordre.
3. Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Avec la calculatrice, déterminer la probabilité que Pierre réussisse son quatrième plongeon.
5. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}2$.
6. Lorsque la probabilité que Pierre réussisse son plongeon devient inférieure ou égale à 0,41, le maître-nageur demande à Pierre de faire une pause.

   On cherche alors à déterminer au bout de combien d'essais Pierre arrête sa série de plongeons.

   On cherche donc à déterminer le plus petit entier naturel $n \geqslant 1$ tel que

   $a_n \leqslant 0{,}41$.

   Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de répondre à la question posée.

Initialisation
Affecter à N la valeur 1
A prend la valeur 1
Traitement
Tant que ....
N prend la valeur ....
A prend la valeur ....
Fin Tant que
Sortie
Afficher ....

7. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par

   $$u_n = a_n - 0{,}4.$$

   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   (b) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = 0{,}6 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4$.

   (c) Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que $a_n \leqslant 0{,}41$.

   (d) Au bout de combien d'essais Pierre arrête-t-il sa série de plongeons ?